

Roman KASZYŃSKI, Anna WYSOCKA

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, KATEDRA INŻYNIERII SYSTEMÓW, SYGNAŁÓW I ELEKTRONIKI

## Filtr uśredniający o zmiennych parametrach $k(t)$ i $T^1(t)$

Dr hab. inż. Roman KASZYŃSKI

Roman Kaszyński ukończył studia w 1973 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej. W 1978 roku uzyskał stopień doktora a w 2002 roku stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie elektrotechnika. Obecnie jest kierownikiem Katedry Inżynierii Systemów, Sygnałów i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym ZUT w Szczecinie. Zainteresowania naukowe to zagadnienia na styku automatyki, metrologii ze szczególnym uwzględnieniem układów o zmiennych parametrach.

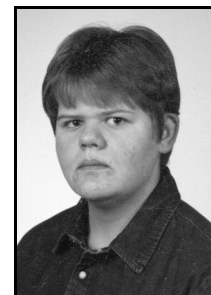
e-mail: roman.kaszynski@zut.edu.pl



Mgr inż. Anna WYSOCKA

Anna Wysocka w 2008 roku ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Szczecińskiej na kierunku Automatyka i Robotyka, specjalność Informatyka w zastosowaniach przemysłowych. Bezpośrednio po uzyskaniu dyplomu rozpoczęła studia doktoranckie na Wydziale Elektrycznym Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego. Zainteresowania naukowe skupiają się na układach dynamicznych o zmiennych parametrach oraz na przetwarzaniu sygnałów.

e-mail: anna.wysocka@zut.edu.pl



### Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę badań filtrów o zmiennych parametrach. Dokonano analizy właściwości filtru 1-go rzędu, w którym w miejsce stałych parametrów wzmocnienia  $k$  oraz stałej czasowej  $T$  wprowadzono zmienne w czasie funkcje, odpowiednio: funkcję wzmocnienia  $k(t)$  i funkcję czasową  $T(t)$ . Pozwala to na skrócenie czasu trwania stanu nieustalonego z  $\alpha$ -dokładnością. Wprowadzenie obu zmiennych parametrów w filtrze 1-go rzędu spowodowało pojawienie się przeregulowań. Zatem ta prosta struktura wykazuje właściwości podobne do struktur wyższych rzędów. Dodatkowo przedstawiono badania symulacyjne filtru 2-go rzędu zbudowanego przy użyciu dwóch jednakowych struktur 1-go rzędu. Wprowadzenie do filtrów zmiennych w czasie dało nawet kilkakrotne skrócenie czasu ustalenia. Zaprezentowano przykładowe przebiegi filtracji przy pomocy filtrów o zmiennych i o stałych parametrach.

**Słowa kluczowe:** zmienne parametry, filtr uśredniający, stacjonarność rozwiązań.

### Averaging filter with time-varying parameters $k(t)$ and $T^1(t)$

#### Abstract

In the paper there is presented analysis of solutions (responses) of filters with time-varying parameters whose values stabilize after the termination of the transient state. On the basis of this analysis, the spectral properties of filters with time-varying parameters such as linear filters with constant parameters can be determined. There are described properties of a 1st order filter in whose structure constant parameters: gain  $k$  and time-constant  $T$  were replaced by time-varying functions, gain function  $k(t)$  and time function  $T(t)$ , respectively. It allows shortening the transient states (with the determined accuracy) of elements with variable parameters in comparison with elements of constant parameters. Implementation of both varying parameters in the 1st order filter can cause appearance of overshoots or even oscillations in the output signals. So this simple structure shows similar properties to that of higher order. Moreover, there is presented the examination of simulations of a 2nd order filter, with use of non-stationary 1st order elements.

**Keywords:** time-varying parameters, averaging filter, stationarity of solutions.

### 1. Wstęp

Z analizy właściwości widmowych oraz dynamicznych filtrów składowej stałej o stałych parametrach, wynika, że istnieje możliwość skrócenia stanu nieustalonego wprowadzając zmienne w czasie parametry filtru w czasie trwania stanu nieustalonego [1, 3, 4]. Ze względu na różnicę pomiędzy czasem wypracowania składowej stałej filtrowanego sygnału, który jest długi a czasem wytlumienia lub przenoszenia składowych zmiennych, który jest krótszy, słusznym jest poszukiwanie możliwości skrócenia stanu nieustalonego przez skrócenie czasu wypracowania składowej stałej. Możliwości takie daje wprowadzenie zmiennych w czasie wartości parametrów filtru podczas trwania stanu nieustalonego.

W rezultacie może to powodować wydłużenie czasu wypracowania składowych zmiennych. Jednak zjawiska tego nie należy traktować jako niekorzystne dopóki czas wypracowania składowych zmiennych nie jest dłuższy od czasu wypracowania składowej stałej. Przyjęto założenie, że zmienne wartości parametry filtru w trakcie trwania stanu nieustalonego są efektywnym sposobem na skrócenie stanu nieustalonego.

### 2. Stacjonarność rozwiązań układów parametrycznych dla $t \rightarrow \infty$

Do analizy właściwości widmowych filtrów o zmiennych w czasie parametrach można stosować metody wykorzystywane w analizie układów o stałych parametrach wówczas, gdy zmienne w czasie parametry filtrów ustalają się po ustaniu stanu nieustalonego (z  $\alpha$  – dokładnością). W pracy [5, 6 7] wykazano, że filtry o zmiennych w czasie parametrach, których wartości ustalają się z upływem czasu dają sygnały wyjściowe stacjonaryzujące się przy czasie dążącym do nieskończoności, na tych samych zasadach co filtry o stałych parametrach. Na tej podstawie można wnioskować, że filtry o tak zmieniających się wartościach parametrów mają właściwości widmowe takie jak ich odpowiedniki o stałych parametrach. W tym celu wykorzystano twierdzenie o gęstości widmowej sygnału wyjściowego oraz zależności między funkcjami korelacji między sygnałem wejściowym i wyjściowym po ustaniu stanu nieustalonego w układzie liniowym. Z analizy tej wynika, iż odpowiedź układu liniowego na wymuszenie stacjonarne jest w stanie nieustalonym procesem niestacjonarnym. Zostały tutaj również uwzględnione zmienne wartości parametrów podczas stanu nieustalonego.

Wykazano również, że funkcja korelacji odpowiedzi układu liniowego na wymuszenie sygnałem stacjonarnym w stanie ustalonym zależy jedynie od  $\tau = t_2 - t_1$ . Relacja ta prawdziwa jest dla układów o zmiennych w czasie parametrach  $a_i(t)$ , jeżeli przy czasie dążącym do nieskończoności parametry układu dążą do wartości stałych  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = const$ . Wyniki tej analizy pozwalają na zastosowanie zależności widmowych obowiązujących dla stanu ustalonego układów liniowych o stałych parametrach do układów o zmiennych w czasie parametrach jeżeli parametry tych układów ustalają swoje wartości z upływem czasu.

### 3. Koncepcja filtrów o zmiennych parametrach z funkcjami $k(t)$ i $T^1(t)$

Do analizy filtrów o zmiennych parametrach wykorzystano badania symulacyjne przeprowadzone na modelu opartym na układzie parametrycznych równań różniczkowych, które reprezentują poszczególne ogniwa pierwszego rzędu w dziedzinie czasu.

$$\begin{aligned} T_1(t) \cdot \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) &= k_1(t) \cdot x(t) \\ T_2(t) \cdot \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) &= k_2(t) \cdot y_1(t) \\ &\vdots \\ T_i(t) \cdot \frac{dy_i(t)}{dt} + y_i(t) &= k_i(t) \cdot y_{i-1}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Funkcje  $T_i^{-1}(t)$  oraz  $k_i(t)$  reprezentują zmienne w czasie parametry filtru i opisane są zależnościami

$$T^{-1}(t) = T^{-1} \cdot [d - (d-1) \cdot h(t)], \quad (2)$$

$$k(t) = k \cdot [d_1 - (d_1-1) \cdot h(t)], \quad (3)$$

gdzie:  $h(t)$  jest odpowiedzią skokową elementu II-go rzędu o stałych parametrach:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega_{0i}^2} s^2 + \frac{2 \cdot \beta_1}{\omega_{0i}} s + 1} \right] \quad (4)$$

$\omega_0 > 0$  – pulsacja własna,  $\beta_0 > 0$  – współczynnik tłumienia.

Ważne jest to aby funkcje zmienności parametrów  $T^{-1}(t)$  oraz  $k(t)$  szybko osiągnęły wartość zadaną w założeniach widmowych. Jest to spełnione dla wartości  $\beta < 1$ , która gwarantuje krótki czas ustalania funkcji  $h(t)$  opisanej równaniem:

$$\begin{aligned} h(t) = 1 - e^{-\omega_{0i} t} \cdot \left[ \cos\left(\omega_{0i} \cdot \sqrt{1-\beta^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \sin\left(\omega_{0i} \cdot t \cdot \sqrt{1-\beta^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Zakres zmienności parametrów funkcji  $T^{-1}(t)$  definiuje parametr  $d$

$$d = \frac{T(0)}{T(\infty)}, \quad (6)$$

oraz  $d_1$  dla funkcji  $k(t)$

$$d_1 = \frac{k(0)}{k(\infty)}. \quad (7)$$

Do oceny jakości parametrycznych filtrów składowej stałej i parametrycznych filtrów dolnoprzepustowych jest czas, po którym sygnał wyjściowy jest obciążony błędem dynamicznym nie większym niż przyjęty dopuszczalny błąd  $\alpha$ .

Czas ustalania filtru parametrycznego na wymuszenie sygnałem skokowym  $x(t) = 1(t)$  oblicza się zgodnie z zależnością:

$$\begin{cases} |1 - h(t_{\alpha 1})| = \alpha \\ |1 - h(t)|_{t > t_{\alpha 1}} \leq \alpha \end{cases} \quad (8)$$

gdzie:  $t_{\alpha 1}$  – czas ustalania odpowiedzi układu z dokładnością  $\alpha$  na skok jednostkowy.

Czas wytlumienia sygnału o pulsacji granicznej  $\Omega$  opisuje zależność:

$$\begin{cases} |y(t_{\alpha 2})| = 2\alpha \\ |y(t)|_{t > t_{\alpha 1}} \leq 2\alpha \end{cases} \quad (9)$$

gdzie:  $y(t)$  – odpowiedź filtru na wymuszenie sygnałem  $x(t)$ ,  $t_{\alpha 2}$  – czas ustalania przy wymuszeniu sygnałem sinusoidalnym  $x(t) = 1(t) \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$ .

Dłuższy z czasów jest czasem ustalania filtru o zmiennych parametrach (niestacjonarnego).

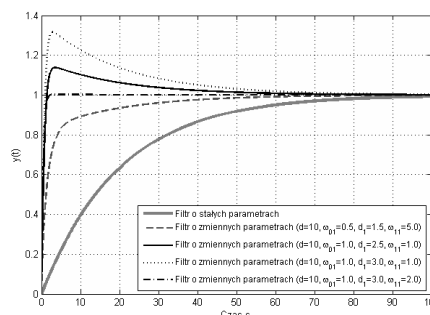
#### 4. Filtr I-go rzędu o zmiennych parametrach z funkcjami $k(t)$ i $T^{-1}(t)$

Przeprowadzono badania symulacyjne - wykorzystując program Matlab-Simulink - filtru I-go rzędu gdzie stałą czasową  $T$  zastąpiono funkcją czasową  $T(t)$  a wartość wzmocnienia  $k$  zastąpiono funkcją wzmocnienia  $k(t)$  opisanych odpowiednio zależnościami (2), (3). Równanie różniczkowe opisujące taki filtr ma postać

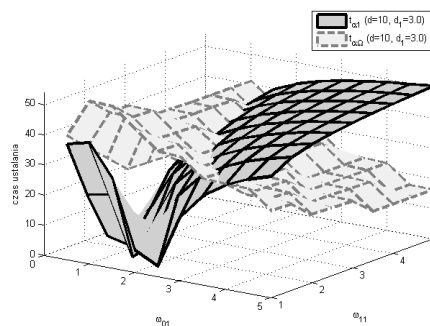
$$T(t) \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k(t) \cdot x(t). \quad (10)$$

W celu poszukiwania optymalnych parametrów funkcji uzmienniających dla filtru I-go rzędu założono zakres zmian parametrów funkcji czasowej  $T^{-1}(t)$ :  $d = [10, 5, 1, 0; \dots; 5, 0]$  oraz dla funkcji wzmocnienia  $k(t)$  zakres zmian  $d_1 = [1, 5, 2, 0; \dots; 3, 0]$ , zaś prędkość zmian  $\omega_{11} = [1, 0, 1, 5; \dots; 5, 0]$ . Współczynnik tłumienia  $\beta_1$  elementu oscylacyjnego funkcji  $h(t)$  przyjęto równy 0,9. Badania wykonano dla wymuszeń  $x(t) = 1(t)$  oraz  $x(t) = \sin(\Omega \cdot t)$ . Na podstawie zależności (8) i (9) z otrzymanych odpowiedzi wyznaczono czasy ustalania dla dokładności  $\alpha = 5\%$ .

Podczas badań zauważono że wprowadzając zmienne wartości parametrów w układzie I-go rzędu mogą występować przeregulowania, które dla odpowiednich parametrów funkcji mieszczą się w pasie o zadanej dokładności  $\alpha$ . Przykładowe przebiegi odpowiedzi układu  $y(t)$  na skok jednostkowy przedstawiono na rysunku 1.



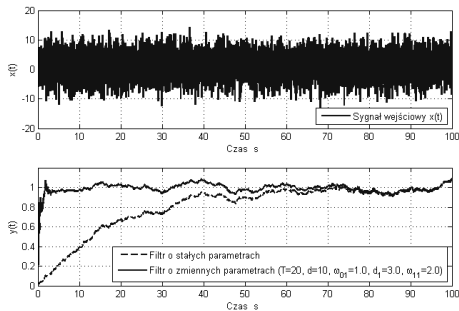
Rys. 1. Odpowiedzi skokowe filtru I-go rzędu  
Fig. 1. Step responses of the 1st order filter



Rys. 2. Przykładowe czasy ustalania przy wymuszeniu skokiem jednostkowym i sygnałem sinusoidalnym dla filtru I-go rzędu  
Fig. 2. Examples of settling times for step response and sinusoidal signal for the 1st order filter

Na rysunku 2 przedstawiono przykładowe wykresy wartości czasów ustalania dla przyjętego podczas badań zakresu wartości parametrów funkcji uzmienniających  $T^{-1}(t)$  i  $k(t)$  dla parametrycznego filtru I-go rzędu.

Widać, że uzmiennienie obydwu parametrów filtru pierwszego rzędu znacznie skróciło czas trwania stanu nieustalonego. Charakterystyczne jest to, że skrócenie czasu filtracji składowej stałej jest powiązane z wydłużeniem czasu wytlumienia składowej zmiennej. Na rysunku 3 przedstawiono przykład filtracji silnie zaszumionego sygnału przy pomocy filtru o zmiennych w czasie parametrach i przy pomocy filtru o stałych parametrach. Wyraźnie widać bardzo duże skrócenie stanu nieustalonego przy utrzymaniu jednakowych widmowych właściwości filtracyjnych.



Rys. 3. Przykładowe przebiegi zaszumionego sygnału, w którym składowa zmienna jest wielokrotnie większa od składowej stałej przy pomocy filtrów I-go rzędu o stałych i zmiennych parametrach

Fig. 3. Example of noised signal, in which the variable component is several times greater than the constant component using the 1st order filters with constant and variable parameters

## 5. Filtr II-go rzędu z funkcjami $k(t)$ i $T^{-1}(t)$

Uzyskując korzystne właściwości filtru pierwszego rzędu z uzmiennionymi obydwoma parametrami, postanowiono wykorzystać go jako element składowy filtru wyższego rzędu. Przeprowadzono badania symulacyjne filtru II-go rzędu opisanego układem parametrycznych równań różniczkowych

$$\begin{aligned} T(t) \cdot \dot{y}_1(t) + y_1(t) &= k(t) \cdot x(t) \\ T(t) \cdot \dot{y}_2(t) + y_2(t) &= k(t) \cdot y_1(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Założono zakres zmian parametrów:

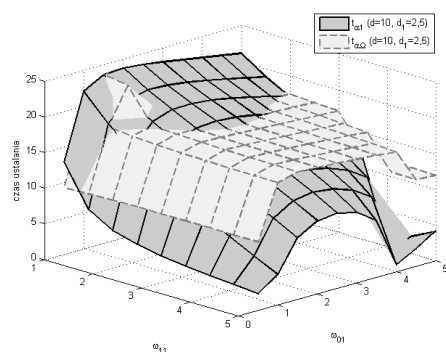
Dla funkcji stałej czasowej  $T(t)$

$$d = 4,5; 6,0; 10, \quad \omega_{01} = [0,5; 1,0; \dots; 5,0]$$

Dla funkcji wzmacnienia  $k(t)$

$$d_1 = [1,2; 1,5; 2,0; \dots; 3,0], \quad \omega_{11} = [1,0; 1,5; \dots; 5,0]$$

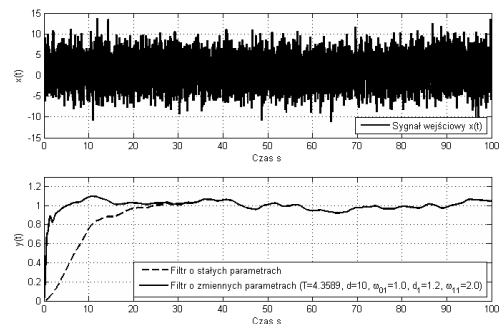
Stałe czasowe dla elementów składowych filtru określone dla  $\alpha = 5\%$  wyniosły  $T_{t \rightarrow \infty} = 4,3589$  s. Na rysunku 4 przedstawiono czasy ustalenia dla filtru drugiego rzędu. Na wykresie można zauważyć, że dla dużego zakresu zmian parametrów, czas wytlumienia składowych zmiennych jest dłuższy od czasu wypracowania składowej stałej. Jednocześnie można zaobserwować, że czas ustalenia dla filtrów II-go rzędu jest znacznie krótszy od czasu ustalenia dla filtru I-go rzędu.



Rys. 4. Przykładowe czasy ustalania przy wymuszeniu skokiem jednostkowym i sygnałem sinusoidalnym dla filtru drugiego rzędu

Fig. 4. Examples of settling times for step response and sinusoidal signal for the 2nd order filter

Na rysunku 5 przedstawiono przykłady filtracji sygnału, w którym niepożądana składowa zmienna wielokrotnie przewyższa sygnał użyteczny. Widać, że filtracja przeprowadzona przy pomocy filtru o zmiennych parametrach jest znacznie szybsza niż przy pomocy odpowiadającego mu filtru o stałych parametrach. Jak łatwo można się zorientować filtracji został poddany ten sam zarejestrowany fragment sygnału. Porównując przebiegi odfiltrowanych sygnałów na rysunkach 3 i 5, można obserwować, że filtr II-go rzędu lepiej wygładza sygnał, co jest wynikiem szybszego opadania charakterystyki widmowej w paśmie zaporowym a co za tym idzie większego tłumienia składowych o wysokich częstotliwościach.



Rys. 5. Przykład filtracji mocno zaszumionego sygnału przy pomocy filtrów II-go rzędu o zmiennych i stałych parametrach

Fig. 5. Example of filtration of highly noised signal using the 2nd order filters with constant and variable parameters

## 6. Wnioski

Wprowadzenie zmiennych w czasie parametrów filtru w podcazas trwania stanu nieustalonego daje możliwość skrócenia czasu ustalania bez pogorszenia właściwości widmowych tego filtru.

Wprowadzenie funkcji  $k(t)$  oraz  $T^{-1}(t)$  w miejsce stałych parametrów w filtrze I-go rzędu daje duże możliwości skrócenia stanu nieustalonego. Zakres parametrów funkcji uzmienniających, dla którego osiągnięto dobre wyniki skrócenia stanu nieustalonego jest dość duży. Wynika z tego, że element taki jest dość odporny (niewrażliwy) na zmianę wartości funkcji uzmienniających. Dodatkowo struktura ta będąca prostym elementem po wstępnych badaniach dobrze się sprawdza jako element składowy filtrów wyższych rzędów.

## 7. Literatura

- [1] Belmont M.R., Matthews J.J.: Generalised frequency response as applied to circuits with time-varying elements, IEE Proc. Circuits Devices Systems, vol. 142, no.4, str. 217-222, August, 1995.
- [2] Choi J.W., Lee H.C.: Linear time-varying eigenstructure assignment with flight control application, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 40, no. 1, pp. 145-157, Jan. 2004.
- [3] Gutierrez de Anda M.A., Sarmiento Reyes L.A.: The analytic determination of the PPV for second-order oscillators via time-varying eigenvalues, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 53, no. 11, ss. 1225-1229, Nov. 2006.
- [4] Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa, 1993.
- [5] Kaszyński R.: Filtry dolnoprzepustowe i filtry składowej stałej o zmiennych parametrach, Monografia, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, 2001.
- [6] Kaszyński R.: Properties of analog systems with varying parameters, in Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, ISCAS, vol. 1, 2003, pp. 509-512.
- [7] Lee S.Y., Cheng C.J.: Linear time-varying filter with variable bandwidth, in Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2006, Islands of Kos, Greece, pp. 2493-2496.
- [8] Piskorowski J., Kaszyński R.: Analytical synthesis of parameter-varying filter of constant component with application to switching systems, Metrology and Measurement Systems, vol. XVIII (2011) no. 3 (w druku).
- [9] Schaumann R., van Valkenburg M.E.: Design of Analog Filters, Oxford University Press, NY, 2001.

otrzymano / received: 14.09.2011

przyjęto do druku / accepted: 02.11.2011

artykuł recenzowany