ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Geodesia et Descriptio Terrarum 1(1-2) 2002, 15-22

O DOBORZE OPTYMALNEJ WIELKOŚCI REGULARNEJ SIATKI DLA NUMERYCZNYCH MODELI TERENU INTERPOLOWANYCH NA PODSTAWIE MAPY WARSTWICOWEJ

Andrzej Borkowski

Streszczenie. Modele numeryczne opisujące powierzchnię terenu w postaci $z=z(x,y)$ organizowane są najczęściej, zwłaszcza te rozległe, na regularnej siatce, na ogół kwadratów. Dane do tych modeli mogą być pozyskiwane, między innymi, w procesie digitalizacji obrazu warstwicowego map topograficznych. Wielkość siatki modelu numerycznego (interwał dyskretyzacji) powinna być dobrana w zależności od cięcia warstwicowego (pionowego interwału dyskretyzacji) i właściwości geometrycznych terenu, tak aby model ten zawierał kompletną i wolną od redundancji informację zawartą w obrazie warstwicowym. W pracy przedstawiono metodę szacowania optymalnej wielkości siatki odpowiadającą podanym kryteriom. W metodzie tej bazującej na stochastycznym modelu rzeźby terenu, parametr charakteryzujący właściwości geometryczne, zmienność spadków terenu, obliczany jest na podstawie długości pomierzonych linii warstwicowych. Podano wyniki obliczeń wielkości siatki dla różnych obszarów Polski oraz wskazówki praktyczne stosowania proponowanej metody.

Słowa kluczowe: numeryczny model terenu, wielkość siatki, optymalna dyskretyzacja

WPROWADZENIE

Numeryczny model powierzchni terenowej, którego historia sięga końca lat pięćdziesiątych, może być uznany za prekursora dzisiejszych systemów geoinformacyjnych. Można zaryzykować stwierdzenie, że systemy te rozwinęły się na bazie NMT. Obecnie NMT jest częścią składową systemów geoinformacyjnych typu GIS, LIS czy topograficznych systemów informacyjnych.

W pełni trójwymiarowe (*3D*) modele, opisujące powierzchnię terenu za pomocą zbioru punktów $\{x,y,z\}$ pozostają wciąż w sferze badań, eksperymentów i dążeń. Dominują tak zwane numeryczne modele typu *2.5D*, w których wysokość z, $z=z(x,y)$, jest atrybutem współrzędnych x,y.

Wysokości mogą być podane na nieregularnej siatce trójkątów lub regularnej siatce, najczęściej kwadratów. Zalety i wady obydwu metod były wielokrotnie dyskutowane. Zauważyć należy tylko, że w praktyce wciąż dominują regularne modele danych, zwłaszcza przy budowie tak zwanych rozległych, obejmujących większe obszary, NMT.

Jedną z metod pozyskiwania danych do NMT – obok metod geodezyjnych, fotogrametrycznych, teledetekcyjnych i skaningu laserowego – jest skanowanie istniejących map warstwicowych, a w szczególności topograficznych. Metoda ta, choć dająca mniejszą dokładność jest metodą najtańszą, zwłaszcza w Polsce, gdzie istnieje pełne pokrycie mapami topograficznymi. Mapom tym zarzuca się często małą aktualność, jednak jak się wydaje, zarzut ten najmniej dotyczy topografii terenu. Reasumując, należy stwierdzić, że interpolacja regularnej siatki wysokościowej z map topograficznych jest najprostszą i najtańszą drogą do pozyskania „warstwy wysokościowej" w systemach geoinformacyjnych, zwłaszcza rozległych. Dla wielu zastosowań wystarczająca jest również osiągana w ten sposób dokładność.

W dalszej części niniejszego opracowania podana zostanie metoda określenia optymalnej wielkości siatki NMT. Najpierw jednak zostaną sformułowane kryteria tej optymalności, które wynikają z rozważań zależności pomiędzy pionowym (cięcie warstwicowe) i poziomym (wielkość siatki) interwałem dyskretyzacji ciągłej powierzchni terenu.

DYSKRETYZACJA POWIERZCHNI TERENU

Zaniedbując linie nieciągłości, typu skarpy, uskoki itp., możemy powierzchnię terenu utożsamiać z pewną ciągłą powierzchnią, przynajmniej częściowo różniczkowalną, z kontinuum. Powierzchnia ta może być reprezentowana w sposób dyskretny na różne sposoby. Klasycznym, analogowym sposobem jej przedstawienia jest mapa warstwicowa, a w szczególności mapa topograficzna. Alternatywnym, cyfrowym sposobem przedstawienia kształtu tego kontinuum są numeryczne modele terenu. W obydwu przypadkach mamy do czynienia z procesem jednostajnej dyskretyzacji ciągłej powierzchni. Interwałem dyskretyzacji jest odpowiednio cięcie warstwicowe z i wielkość siatki modelu numerycznego Δ. Obydwa parametry dobierane są w oparciu o pewne obiektywne kryteria tak, aby jak najwierniej oddawały rzeczywisty kształt powierzchni i żadna istotna informacja nie została zgubiona w procesie dyskretyzacji.

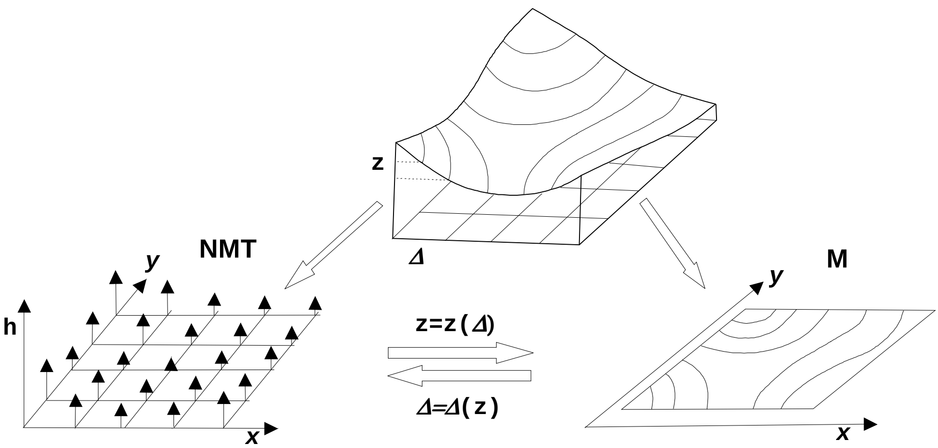
Wielkość cięcia warstwicowego dobierana jest w zależności od skali mapy, spadku terenu, jego urozmaicenia i od dokładności pomiaru.

Wielkość siatki dobierana jest w oparciu o znane w teorii cyfrowego przetwarzania sygnałów twierdzenie o próbkowaniu. Przy założeniu, że dwuwymiarowy sygnał, w tym przypadku ciągła powierzchnia terenu, posiada skończoną gęstość spektralną, to znaczy, że składowe spektralne powyżej pewnej częstotliwości granicznej ω_g są równe zero, lub inaczej, że długość fali najmniejszej składowej spektralnej $\lambda_{\min}$ tego sygnału jest wartością skończoną, wielkość siatki powinna być tak dobrana, aby spełnione było twierdzenie *Kotelnikowa*, to znaczy, aby zachodziła zależność: $\Delta \le \pi / \omega_g$, lub inaczej $\Delta \le \lambda_{\min} / 2$. Oznacza to, że ciągły sygnał powinien być zdigitalizowany z taką gęstością, aby składowa o najmniejszej długości fali uchwycona była za pomocą co najmniej dwóch punktów. Zagwarantowane jest wtedy zawarcie w ciągu dyskretnych wartości pełnej informacji o sygnale. Daje to możliwość wiernoinformacyjnego odtworzenia, w oparciu o punktowe wartości, ciągłego przebiegu sygnału w dowolnym momencie.

Istnieje wiele sposobów praktycznej realizacji twierdzenia o próbkowaniu podczas budowy numerycznego modelu terenu, zwłaszcza metodami fotogrametrycznymi. Przegląd możliwości w tym zakresie można znaleźć w pracy [Fritsch 1992].

Obydwie formy reprezentacji mogą być wzajemnie źródłem informacji dla siebie: obraz warstwicowy może być produktem pochodnym numerycznego modelu i odwrotnie, numeryczny model może być interpolowany na podstawie obrazu warstwicowego.

Optymalny dobór interwału dyskretyzacji sprowadza się zatem do określenia wielkości $z = z(\Delta)$ lub $\Delta = \Delta(z)$. Schematycznie zagadnienie to przedstawione jest na rysunku 1. Jako optymalną wartość z względnie Δ rozumiemy taką wartość, przy której przejście $NMT \rightarrow M$ lub $NMT \leftarrow M$ zachowuje pełną informację zawartą w produkcie wyjściowym i jednocześnie wolne jest od redundancji.



Rys. 1. Ciągła powierzchnia terenu i jej dyskretne reprezentacje: numeryczny model terenu (NMT) i obraz warstwicowy (M)

Fig. 1. Continuous terrain surface and discrete representations: digital terrain model (NMT) and contour lines map (M)

Zależność pomiędzy pionowym a poziomym interwałem dyskretyzacji można podać na gruncie teorii procesów stochastycznych. Zakładając, że powierzchnia terenu jest realizacją dwuwymiarowego, stacjonarnego procesu stochastycznego o rozkładzie normalnym i że rozkład ten ma charakter homogeniczno-izotropowy mamy [Borkowski 1994, Borkowski i Meier 1994]:

$$\frac{\Delta}{z} = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma_{h'}^{2}}} \tag{1}$$

Stosunek poziomego do pionowego interwału dyskretyzacji zależy tylko od jednego parametru, wariancji pierwszej pochodnej procesu $\sigma_{h'}^{2}$, która jest jednocześnie krzywizną funkcji autokowariancji w punkcie początkowym. Innymi słowy zależy tylko od zmienności spadków terenu.

W pracy [Borkowski 1994] znaleźć można zależności pomiędzy poziomym a pionowym interwałem dyskretyzacji dla bardziej uogólnionych modeli, na przykład dla procesów nieizotropowych. W zastosowaniach praktycznych wystarczająca i najbardziej stabilna okazuje się jednak zależność (1).

METODA SZACOWANIA INTERWAŁU DYSKRETYZACJI

Dysponując obrazem warstwicowym powierzchni terenu o stałej wartości cięcia warstwicowego *z* należy jeszcze oszacować wielkość $\sigma_{h'}^2$. Te dwie wartości wystarczą do określenia optymalnej wielkości siatki modelu cyfrowego. Wariancję $\sigma_{h'}^2$ można oszacować na podstawie informacji zawartych w obrazie warstwicowym powierzchni terenu, jeżeli pozostaniemy dalej na gruncie teorii procesów stochastycznych. Zakładając, że powierzchnia terenu jest realizacją procesu stochastycznego o właściwościach zdefiniowanych w poprzednim rozdziale, długość linii warstwicowych przypadających na jednostkę powierzchni $l(h)$ na poszczególnych poziomach wysokości h, będących całkowitą wielokrotnością *z*, ma rozkład normalny i wyraża się zależnością [Borkowski 1994; Meier i Borkowski 1992]:

$$l(h) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_{h'}^2}{\sigma_h^2}}\, e^{-(h-\bar{h})^2/2\sigma_h^2} \tag{2}$$

Nieznane wielkości wariancji spadków terenu $\sigma_{h'}^2$, średniej wysokości na danym obszarze $\bar{h}$ oraz wariancji wysokości σ_h^2, można oszacować metodą najmniejszych kwadratów na podstawie pomierzonych długości linii l_i na co najmniej trzech poziomach wysokości, $l_i = l(h_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., n;\ n \geq 3$. Wprowadźmy dla tych parametrów następujące oznaczenia: $x_1 := \sigma_{h'}$, $x_2 := \sigma_h$, $x_3 := \bar{h}$. Ich przybliżone wartości oznaczmy odpowiednio przez x_{10}, x_{20}, x_{30}. Wówczas zlinearyzowane równanie poprawek ma postać:

$$v_i = a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + c_i \delta x_3 - d_i$$

gdzie:

$$a_i := w_i, \qquad b_i := \frac{x_{10}}{x_{20}^3}\left[(h_i - x_{30})^2 - x_{20}^2\right] w_i, \qquad c_i := \frac{x_{10}(h_i - x_{30})}{x_{20}^2} w_i$$

$$-d_i := x_{10} w_i - l_i \qquad w_i := \frac{1}{2x_{20}} e^{-(h_i - x_{30})^2/2x_{20}^2},$$

lub krótko: $\mathbf{v} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} - \mathbf{d}$, a rozwiązaniem, przy $\mathbf{v}^T\mathbf{v} \to \min$ jest: $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{Ad}$. Oszacowana wartość $\sigma_{h'} = x_{10} + \delta x_1$ oraz znana wartość cięcia warstwicowego *z* pozwala obliczyć Δ, na podstawie (1).

Wartości przybliżone niewiadomych można określić, z wystarczającą dokładnością, w następujący sposób:

– jako średnią wysokość x_{30} na danym obszarze przyjąć tę, dla której długość linii warstwicowych jest największa ($l_{\max}$);
– odchylenie standardowe wysokości obliczyć jako: $x_{20} = (h_{\max} - h_{\min})/6$, gdzie $h_{\max}$ i $h_{\min}$ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wysokość na rozpatrywanym obszarze;
– wartość odchylenia standardowego x_{10} wynika bezpośrednio z równania (2): $l(\bar{h}) = \sigma_{h'} / 2\sigma_h$, a stąd dalej $x_{10} = 2x_{20}l_{\max}$.

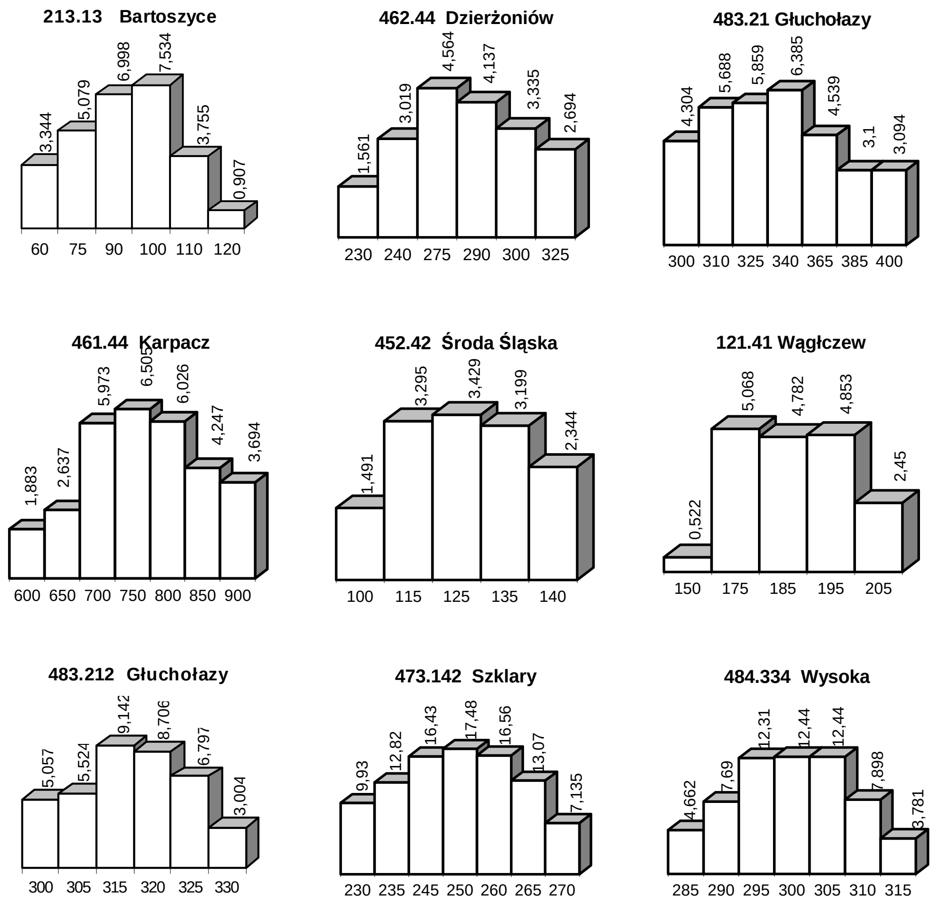
Otrzymane rozwiązanie można poprawić, w razie potrzeby, w procesie iteracyjnym, to znaczy obliczone wartości parametrów przyjąć jako przybliżone i rozwiązać zadanie powtórnie. Powyższy model można łatwo rozszerzyć o ocenę dokładnościową [Borkowski i Meier 1994]. Błędy średnie estymowanych parametrów będą zawierały wówczas zarówno błędy pomiaru linii warstwicowych, jak i odchylenia od założeń modelowych.

PRZYKŁADY PRAKTYCZNE

Przedstawioną metodę szacowania interwału dyskretyzacji zastosowano do określenia optymalnej wartości Δ dla siatki interpolowanej na podstawie map topograficznych w skalach 1:10000 i 1:25000 wybranych obszarów Polski. Wykorzystano w tym celu dane zebrane w ramach, wykonanej pod kierunkiem autora, pracy dyplomowej [Job 1999]. Długości linii warstwicowych na poszczególnych arkuszach mapy zostały pomierzone za pomocą kartometru. Wartości te, w przeliczeniu na jednostkę powierzchni, na poszczególnych poziomach wysokościowych zestawiono w postaci histogramów na rysunku 2. Histogramy te dają pewne wyobrażenie o tym, w jakim stopniu rzeczywiste dane spełniają założenia modelowe dotyczące normalnego rozkładu długości linii na poszczególnych poziomach wysokościowych. Wprawdzie pomiary wykonano tylko na kilku poziomach wysokościowych, starano się jednak wybierać te poziomy tak, aby rozłożone one były równomiernie po obydwu stronach przewidywanej wartości średniej na danym obszarze, to znaczy, aby uzyskać możliwie najlepszą aproksymację równania (2).

W oparciu o pomierzone długości warstwic oszacowano, podane w tabeli 1, wartości parametrów $\hat{\bar{h}}$, $\hat{\sigma}_h$ i $\hat{\sigma}_{h'}$. W zestawieniu z wartością cięcia warstwicowego *z* otrzymano wielkości siatki $\hat{\Delta}$ dla obszaru objętego poszczególnym arkuszem mapy. Tabela 1 zawiera ponadto godło i nazwę arkusza mapy, z którego pochodzą dane, skalę mapy oraz syntetyczną charakterystykę terenu.

Otrzymane wielkości potwierdzają oczywistą prawdę: na terenach równinnych czy nizinnych, gdzie mamy na ogół do czynienia z mniej urozmaiconą rzeźbą terenu można stosować siatkę numerycznego modelu o mniejszej gęstości, na terenach o bardziej zróżnicowanej rzeźbie, np. podgórskich, siatka ta ulega zagęszczeniu.



Rys. 2. Histogramy długości linii warstwicowych na jednostkę powierzchni (w $10^{-4} m^{-1}$) na poszczególnych poziomach wysokości

Fig. 2. Histograms of the contour lines length respect to area unit (in $10^{-4} m^{-1}$) at the particular height levels

Analizując zestawione w tabeli wartości można zauważyć pozorną sprzeczność. Dla mapy o nazwie Głuchołazy otrzymano mniejszą wielkość siatki dla skali 1:25000 niż dla skali 1:10000. Sprzeczność tę można wyjaśnić zestawiając obydwie mapy ze sobą. Arkusz w skali 1:25000 obejmuje zarówno tereny o bardziej skomplikowanej strukturze – ciągnące się wzdłuż granicy państwowej Góry Opawskie – jak i tereny na północ od miasta Głuchołazy, charakteryzujące się mniejszym urozmaiceniem rzeźby (regularne, gładkie warstwice o niewielkiej zmienności krzywizny). Ten ostatni typ rzeźby terenu dominuje na arkuszu w skali 1:10000, obejmującym obszar na północny zachód od miasta Głuchołazy. Obliczona wartość Δ dla skali 1:25000 jest, w pewnym sensie, uśrednioną wartością dla całego obszaru. Prawidłowym podejściem w tego typu sytuacjach jest wydzielenie podobszarów o jednorodnej strukturze rzeźby terenu i oszacowanie odpowiednich parametrów dla poszczególnych obszarów. Takie podejście jest zgodne ze stosowaną, podczas budowy numerycznych modeli terenu, zwłaszcza na podstawie stereomodelu, metodą siatek zagęszczających (ang. progressive sampling). W ten sposób gwarantujemy również lepsze spełnienie założeń modelowych metody.

Tabela 1. Zestawienie obliczonych wartości. Objaśnienia w tekście
Table 1. Combination of the estimated values. Explanation in the text

Mapa Map	Skala Scale	Teren Terrain	z [m]	$\bar{h}$ [m]	σ_h [m]	$\sigma_{h'}$	Δ [m]
213.13 Bartoszyce	1:25000	nizinny lowland	2,5	90,1	20.7	0,0260	72
462.44 Dzierżoniów	1:25000	podgórski piedmont	2.5	273,8	37,8	0,0366	58
483.21 Głuchołazy	1:25000	podgórski piedmont	2.5	333,7	49,2	0,0560	36
461.44 Karpacz	1:25000	górski mountain	2.5	769,7	106,0	0,1372	15
452.42 Środa Śląska	1:25000	równinny plain	1.25	117,9	22,3	0,0167	79
121.41 Wągłczew	1:25000	równinny plain	2.5	172,0	15,5	0,0237	116
483.212 Głuchołazy	1:10000	podgórski piedmont	1.25	314,3	11,0	0,0218	45
473.142 Szklary	1:10000	pagórkowaty hilly	1.25	249,5	17,2	0,0629	16
484.334 Wysoka	1:10000	pagórkowaty hilly	1.25	299,9	9,9	0,0264	38

PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda szacowania optymalnej wielkości regularnej siatki dla numerycznych modeli terenu interpolowanych na podstawie obrazu warstwicowego, a w szczególności z map topograficznych bazuje na teorii procesów stochastycznych. Spełnienie założeń modelowych w przypadku naturalnej powierzchni terenu jest możliwe tylko w pewnym ograniczonym zakresie. Na podstawie badań można stwierdzić, że metoda daje dobre wyniki nawet w przypadku dużych odchyleń od rozkładu normalnego. Znacznie istotniejsze jest spełnienie założenia stacjonarności procesu stochastycznego – odchylenia w tym zakresie prowadzą do zafałszowania wyników. Rozwiązaniem tutaj jest wydzielenie obszarów o jednorodnej strukturze rzeźby terenu.

W oparciu o przedstawioną metodę można oszacować optymalną wielkość siatki, to znaczy taką, przy której dyskretne wartości zawierają kompletną informację o terenie i jednocześnie są wolne od redundancji, czyli od danych, które nie zawierają żadnej dodatkowej informacji. Optymalną siatkę należy tutaj rozumieć w sensie średnim. Oznacza to, że mogą być obszary wymagające dodatkowej informacji. Takie podejście jest jednak zgodne z filozofią budowy tak zwanych hybrydowych NMT, w których informacja wysokościowa podana na regularnej siatce, uzupełniana jest o wektorowe bądź punktowe informacje o liniach nieciągłości, punktach charakterystycznych itp. [Kraus 2000].

Otrzymanych za pomocą przedstawionej metody wielkości siatki nie należy traktować w kategoriach absolutnych, a raczej jako wielkości kierunkowe. Uważamy jednak, że proponowana metoda może być pomocnym narzędziem przy wyborze wielkości siatki dla numerycznych modeli terenu, zwłaszcza, że nakład pracy związany z jej stosowaniem jest niewielki. Długości linii warstwicowych można otrzymać niejako przy okazji w procesie digitalizacji.

PIŚMIENNICTWO

Borkowski A., 1994. Stochastisch-geometrische Beschreibung, Filterung und Präsentation des Reliefs. Deutsche Geodätische Kommision, Reihe C, Heft Nr 431 München.

Borkowski A., Meier S., 1994. Ein Verfahren zur Schätzung der Rasterweite für digitale Höhenmodelle aus topographischen Karten. Geo-Informations-Systeme, Karlsruhe 7(1994)1, 2–5.

Fritsch D., 1992. Zur Abschätzung des kleinsten Diskretisierungsintervall bei der DGM-Datenerfassung. Zeitschrift für Vermessungswesen 117(1992)7, 367–377.

Job M., 1999. Określenie optymalnej wielkości siatki cyfrowego modelu terenu na podstawie map topograficznych w różnych skalach dla wybranych typów krajobrazów. Praca magisterska AR Wrocław.

Kraus K., 2000. Photogrammetrie. Band 3: Topographische Informationssysteme. Dümmler, Köln.

Meier S., Borkowski A., 1992. Die Äquidistanz von Höhenlinien aus der Sicht der Signalabtastung. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, 117(1992)11, 716–726.

ON THE OPTIMAL GRID CELL SIZE FOR DIGITAL TERRAIN MODELS INTERPOLATED FROM CONTOUR LINES MAPS

Abstract. Digital terrain models, witch describes terrain surface in form $z=z(x,y)$ are given mainly as grid models. The data for these models could be captured from topographic maps in any digitising process. In this case the grid cell size is determined through the contour interval and geometric characteristic of the terrain. A method for the optimum grid cell size estimation, witch save a complete as well as non-redundant data capture is presented. The method is based on the stochastic terrain model. The terrain geometric characteristic within this model is the variance of terrain inclination, witch can be estimated using the measured length of contour lines at the different height levels. Results of the grid cell size estimation for several regions of Poland and hints for user are given.

Key words: digital terrain model, grid cell size, optimal discretization

Andrzej Borkowski, Katedra Geodezji i Fotogrametrii, Akademia Rolnicza we Wrocławiu, ul. Grunwaldzka 53, 50-357 Wrocław, e-mail: borkowski@ar.wroc.pl