Wojciech TARNOWSKI
Politechnika Koszalińska, Koszalin

RÓWNOCZESNA OPTYMALIZACJA LUB POLIOPTYMALIZACJA MASZYNY I PROCESU

Słowa kluczowe

Optymalizacja statyczna, optymalizacja dynamiczna, optymalizacja procesu, polioptymalizacja, optymalizacja wielokryterialna, modelowanie matematyczne.

Streszczenie

Przyjmuje się, że jest racjonalna jednoczesna (w jednym zadaniu) optymalizacja maszyny oraz optymalizacja parametrów procesu jej eksploatacji.

Sformułowano zadanie optymalizacji statycznej i zadanie optymalizacji dynamicznej oraz zadanie polioptymalizacji. Na podstawie krótkiego przeglądu metod rozwiązywania zadań optymalizacji dynamicznej wykazano dogodność dyskretyzacji zmiennych niezależnych, która umożliwia przekształcanie zadania optymalizacji dynamicznej na zadanie optymalizacji statycznej z wieloma zmiennymi decyzyjnymi, oraz w naturalny sposób umożliwia optymalizację parametrów procesu i maszyny w jednym zadaniu.

Wprowadzenie

Projektowana maszyna (czy inny obiekt, na przykład budowla, środek transportu itp.) jest przeznaczona do realizacji określonego procesu technologicznego lub transportowego.

Przesłanką tej pracy jest, że nie jest racjonalna optymalizacja maszyny bez rozpoznania jej procesu eksploatacji, który ma ona realizować. Ten proces może być opisany co najmniej w kategoriach losowych, to znaczy można założyć określony rodzaj rozkładu prawdopodobieństwa procesu stochastycznego i jego parametry. Zatem możliwe jest włączenie tego opisu do matematycznego sformułowania zadania optymalizacji czy poplioptymalizacji.

Na etapie projektowania obiektu, w procesie optymalizacji poszukuje się zwykle wartości parametrów konstrukcyjnych maszyny (np. wymiarów czy materiałów) oraz funkcji kształtu (np. profilu łopat mieszadła), oraz funkcji sterowań (np. prędkości obrotowej mieszadła w funkcji lepkości). Z reguły takie zadanie jest trudne do rozwiązania z kilku powodów: kryteria i ograniczenia są dyskusyjne oraz model matematyczny jest utworzony z nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych, a niektóre zależności trzeba opisywać w kategoriach rozmytych. Ponadto należy uwzględnić bardzo dużą liczbę zmiennych decyzyjnych.

W tej sytuacji dokonuje się wielu uproszczeń, np. dekompozycji zadania, uproszczeń równań i innych, co powoduje utratę dokładności rozwiązania, a jeśli kryteria są nieadekwatne lub uproszczenia są zbyt silne, to nawet dyskwalifikuje cały trud optymalizacji.

W tej pracy uzasadnia się celowość i efektywność przekształcania zadania optymalizacji dynamicznej do zadania optymalizacji statycznej przez dyskretyzację zmiennych niezależnych: czasu i współrzędnych przestrzeni kartezjańskiej [7].

1. Zadanie optymalizacji

Obiektem optymalizacji może być maszyna (lub budowla, pojazd itp.) lub proces.

Proces będziemy rozumieli jako ciąg stanów obiektu optymalizacji w przestrzeni zmiennych niezależnych. Jeśli jest tylko jedna zmienna niezależna ciągła, to proces jest opisany zwyczajnym równaniem różniczkowym, jeśli dwie lub więcej – równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Ocena jakości procesu zazwyczaj oparta jest na ocenie przebiegu tego procesu w określonym przedziale zmiennych niezależnych, na przykład w określonym przedziale czasu T = [t1, t2],

Do ilościowej oceny przebiegu procesu używa się zazwyczaj pewnych funkcjonałów[1] $F(y_1, ..., y_N)$, na przykład wartości średniej, odchylenia średniokwadratowego, liczby oscylacji itp. Takie funkcjonały mogą być używane jako kryteria polioptymalizacji, na przykład całka $F = \int_{t1}^{t2} y(t)dt$, gdzie

[1] Zatem liczb.

$y = \{y_1, ..., y_N\}$ jest wektorem zmiennych wyjściowych, natomiast t jest czasem, przebiegającym w zadanym przedziale.

Przebieg procesu czasowego zależy od wielkości wpływających, wśród nich wyróżniamy sterowania $u(t)$, zakłócenia $z(t)$ i parametry p, te ostatnie nie są funkcjami zmiennych niezależnych (np. czasu). Wśród parametrów wyróżniamy parametry konstrukcyjne obiektu, w którym proces zachodzi (wymiary i materiały) oraz nastawy[2].

Jeśli w procesie optymalizacji poszukuje się funkcji sterowań u(t) lub warunków brzegowych $u(z_1, z_2, z_3, t)$, to taki przypadek nazywa się optymalizacją dynamiczną. Typowym przypadkiem zadania optymalizacji dynamicznej jest sterowanie procesami, np. optymalne sterowanie wózkiem suwnicy. Także w projektowaniu maszyny można formułować takie zadania: na przykład w przypadku optymalizacji kształtu, gdy powierzchnie są krzywoliniowe, w zagadnieniach ciągłych statycznie niewyznaczalnych (np. w łożyskach) itp.

Jeśli w procesie optymalizacji poszukuje się wartości zmiennych decyzyjnych (np. nastaw p), to mówimy o optymalizacji statycznej.

Najbardziej ogólny przypadek optymalizacji procesu jest wtedy, gdy poszukuje się w jednym zadaniu optymalnych funkcji sterowań i optymalnych wartości parametrów.

Optymalizacja dynamiczna jest trudna i pracochłonna, dlatego poszukuje się uproszczeń obliczeniowych. Formą uproszczenia jest dyskretyzacja zmiennych niezależnych, o czym dalej.

2. Pojęcia i terminologia

Dany jest *obiekt optymalizacji* – to jest pewien układ materialny (np. maszyna, budynek, urządzenie, pojazd, rozmieszczenie obiektów) lub układ abstrakcyjny (np. struktura organizacyjna przedsiębiorstwa, harmonogram przedsięwzięcia, rozkład jazdy kolei itp.).

Dana jest przestrzeń *zmiennych niezależnych* $Z = \{z_1, z_2, z_3, t\}$, gdzie z_i są zmiennymi przestrzennymi a t jest czasem.

Zależnie od charakteru tych zmiennych, obiekt optymalizacji może być *ciągły w przestrzeni* lub – po uproszczeniach – *dyskretny w przestrzeni*. W tym drugim przypadku, jeśli można przyjąć, że interesujące nas właściwości y są w danej chwili jednakowe w całym obiekcie, mówimy o przypadku 'obiektu o stałych skupionych' lub zamiennie: o obiekcie dyskretnym w przestrzeni.

Analogicznie czas może być zmienną niezależną ciągłą lub może być zmienną zdyskretyzowaną; w tym drugim przypadku mówimy o procesie z czasem dyskretnym.

[2] Typowo są to wielkości ustawiane przez operatora i niezmienne w jakimś przedziale czasu, np. przełożenie przekładni w skrzyni biegów samochodu.

Należy tu podkreślić, że każdy modelowany rzeczywisty układ jest ciągły, a układ dyskretny jest tylko jego przybliżeniem.

Proces można scharakteryzować przebiegiem wybranych zmiennych *y(Z)* w przestrzeni zmiennych niezależnych. Jest to zbiór wielkości wyjściowych procesu, $y = \{y_i, i = 1,..., N\}$ – to są te wielkości, które charakteryzują przebieg procesu, na przykład temperatura, ciśnienie i trzy składowe prędkości cieczy w zbiorniku. Każda z nich może być funkcją wszystkich lub niektórych zmiennych niezależnych: $y_i = f_i(z_1, z_2, z_3, t)$. Zauważmy, że funkcje f_i: $y_i = f_i(u_j, p, z_1, z_2, z_3, t)$ są zależne od parametrów konstrukcyjnych *p* obiektu oraz od *funkcji* wymuszeń zewnętrznych $u_j = u_j(z_1, z_2, z_3, t)$[3].

Wymuszeniami nazywamy łącznie: zmienne sterujące oraz zakłócenia.

Sterowania to sygnały kontrolowane (tzn. te, które można kształtować), można je zatem modelować jako znane zmienne deterministyczne. Natomiast *zakłócenia* to sygnały przypadkowe, które co najwyżej można modelować jako zmienne losowe; niekiedy są to wielkości niemierzalne i wówczas można je modelować jako zmienne rozmyte.

Stanem obiektu (stanem procesu) s_0 nazwiemy wektor wartości zmiennych wyjściowych $s_0 = s|_{(z_1, z_2, z_3, t)} = [y_1, y_2, y_3, ..., y_n]$ w danym punkcie przestrzeni i w danej chwili czasu $Z_0 = [z_1, z_2, z_3, t]$.

Procesem nazwiemy ciąg stanów obiektu, np. kolejne wartości konkretnej wielkości wyjściowej wzdłuż konkretnej trajektorii w przestrzeni zmiennych niezależnych, np. rozkład temperatury wzdłuż określonej krawędzi zbiornika, albo zmiany temperatury w czasie w konkretnym miejscu zbiornika, albo wysokości punktów geodezyjnych drogi w funkcji współrzędnych geograficznych, albo wysokość poziomu falującej wody itp.

W tym rozumieniu procesem nazwiemy także ciąg punktów w przestrzeni kartezjańskiej i w niej badamy przebieg zmiennych stanu, na przykład przebieg drogi na zboczu góry lub kształt powierzchni skrzydła samolotu. W tych ostatnich przykładach czas nie występuje jako zmienna niezależna.

Jeśli występuje co najmniej jedna przestrzenna zmienna niezależna, opis procesu wymaga ujęcia w przestrzeni 1D lub odpowiednio 2D lub 3D.

Kryterium cząstkowym k_i nazwiemy tę wielkość ze zbioru właściwości *y*, która będzie charakteryzowała jakość procesu w określonym obszarze przestrzeni zmiennych niezależnych i będzie użyta do zdefiniowania kryterium optymalizacji.

W przypadku optymalizacji procesu to będzie z reguły funkcjonał (1), określany na zdefiniowanych przedziałach zmiennych niezależnych na przykład jako

[3] Które noszą nazwę Warunków Brzegowych (WB).

wartość średnia albo wartość maksymalna itp. Na przykład dla procesu wymiany ciepła może to być średnia temperatura wymiennika albo jego moc cieplna, albo energia cieplna; dla procesu regulacji to może być przeregulowanie, czas regulacji, zapas stabilności itp.

$$k_i = \int_{z_1 \min}^{z_1 \max} dz_1 \int_{z_2 \min}^{z_2 \max} dz_2 \int_{z_3 \min}^{z_3 \max} dz_3 \int_{t \min}^{t \max} f(.) dt \qquad i=1,..., r \tag{1}$$

gdzie $f(.) = f\left(y_i, i = 1,..., n, u_j, j = 1,..., m, p\right)$

Liczba kryteriów *r* zwykle nie jest duża (kilka).

3. Model matematyczny zadania optymalizacji statycznej [8]

Zadanie jest zdefiniowane, gdy zdefiniowane jest kryterium optymalizacji, zbiór zmiennych decyzyjnych i ograniczenia: funkcyjne i przedziałowe na zmienne niezależne.

Kryterium optymalizacji F jest zwykle utworzone w postaci funkcji kryteriów cząstkowych $F = f(k_i; i = 1,..., r)$

Ograniczenia funkcyjne są zbiorem nierówności:

$$og_i = og_i\left(y_i, i = 1,..., n, u_j, j = 1,..., m, p\right) \leq 0 \quad i = 1,...,g \tag{2}$$

4. Model matematyczny zadania optymalizacji dynamicznej

W ogólnym przypadku optymalizacji dynamicznej dany jest zbiór zmiennych niezależnych $Z = \{z_1, z_2, z_3, t\}$. W definicjach tego rozdziału pracy ograniczymy się dla prostoty do jednej zmiennej niezależnej *t* i będziemy ją interpretować jako czas, albo do jednej zmiennej przestrzennej. Podobnie, narzucimy tylko jedno ograniczenie przedziałowe na tę zmienną, np.: $t \varepsilon [0,T]$, gdzie T jest danym horyzontem czasu.

Wprowadźmy pewien zbiór funkcji $u = \{u_1,...,u_k\}$, które będziemy nazywać sterowaniami procesu i których będziemy poszukiwali jako funkcji t:

$$u_k = u_k(t) \quad k = 1,...,K \tag{3}$$

Niech będzie dany zbiór ograniczeń U na sterowania:

$$U = \left\{ \begin{array}{ll} (u_1,...,u_k) \ : \ \varphi_i(u_1,...,u_k) \geq 0 & i = 1,...,s \quad \cap \\ \qquad\qquad \cap \ \varphi_j(u_1,...,u_k) = 0 & j = 1,...,r \end{array} \right\} \tag{4}$$

gdzie φ jest symbolem zależności funkcyjnej.

Zbiór U tworzy przestrzeń *sterowań dopuszczalnych*.
Dalej: dany jest opis dynamiki układu, na przykład:

a) w postaci układu równań różniczkowych n-tego rzędu:

$$f\left(\overset{(n)}{x}, \overset{(n-1)}{x}, \ldots, \dot{x}\, x, u, p, t\right) = 0 \tag{5}$$

oraz wartości początkowych:

$$x(t=0) = x_0 \tag{6}$$

gdzie x jest zbiorem obserwowalnych zmiennych wyjściowych, wystarczającym do oceny jakości procesu dla każdego wektora zmiennych niezależnych *t*, natomiast $p = \{p_1, \ldots, p_z\}$ jest zbiorem określonych parametrów konstrukcyjnych, niezależnych od zmiennych niezależnych,

b) lub w postaci macierzowego równania stanu

$$\dot{x} = F(x, u, t) \tag{7}$$

a w postaci liniowej

$$\dot{x} = \mathbf{A} \cdot x + \mathbf{B} \cdot u \tag{8}$$

gdzie $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ jest zbiorem zmiennych stanu układu, natomiast A i B są odpowiednio macierzą stanu i macierzą sterowania.

Elementy a_{ij} macierzy *A* i elementy b_{mn} macierzy *B* są funkcjami parametrów konstrukcyjnych $p = \{p_1, \ldots, p_z\}$.

Dane są ponadto ograniczenia OG na zmienne stanu[4]:

– nierównościowe, np.: $x_i(t) \le c$ lub $g(x(t)) \le 0$ (9)

lub typu całkowego: $\int_0^T x_i^2(t)\,dt \le c$ lub $\int_0^T |x(t)|\,dt \le c$ (10)

Ograniczenia OG definiują przestrzeń stanów dopuszczalnych.

Dane są funkcjonały $f_j = f_j(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k)$ $j = 1, \ldots, J$, o których zakładamy, że mogą być określone na obszarze U∩T i które będziemy interpretowali

[4] Lub na zmienne wyjściowe **y** = {y_1, ..., y_p}, związane ze zmiennymi stanu macierzowym równaniem algebraicznym **y = C•x.**

jako cząstkowe kryteria jakości (wskaźniki jakości) procesu k_i, zatem wektor f jest wektorową miarą jakości procesu.

Zamiennie do ograniczeń OG(x) w przestrzeni celów mogą być sformułowane ograniczenia na wartości funkcjonałów:

$$\mathbf{\Phi} = \left\{ \left(f_1,...,f_J \right) \;:\; \alpha_i\left(f_1,...,f_J \right) \geq 0 \;\cap\; \beta_k\left(f_1,...,f_J \right) = 0 \right\} \tag{11}$$

które definiują wymagania na jakość procesu.

Ostatecznie definiuje się skalar (12):

$$\mathbf{F} = F\left(f_1,...,f_J \right) \tag{12}$$

który może być globalną skalarną miarą jakości procesu.

Problem optymalizacji procesu może być sformułowany następująco: należy znaleźć takie sterowania $u_{opt} \in U$ w przedziale [0, T], aby funkcja skalarna F (12) osiągnęła najlepszą wartość w obszarze zadanym ograniczeniami OG:

$$u_{opt} = \left\{ u = \left(u_1,...,u_k \right) \;:\; \mathrm{F}\left(u \right) = \sup_{T \cap \Phi \cap U} F\left(u \right) \right\} \tag{13}$$

Jest to zadanie optymalizacji dynamicznej, ponieważ zmienne decyzyjne $u_k(t)$ są funkcjami zmiennej niezależnej t lub innych dowolnych zmiennych niezależnych. Do zmiennych decyzyjnych w zadaniu optymalizacji można dołączyć niektóre parametry $p = \left\{ p_1,..., p_z \right\}$.

Powyżej sformułowano zadanie optymalizacji wielokryterialnej, natomiast jeśli J = 1, wówczas mamy optymalizację jednokryterialną, a jeśli jest kilka kryteriów, lecz nie definiujemy skalara F (12), to mamy zadanie polioptymalizacji.

Ograniczenia nierównościowe i równościowe U, X i Φ są zapisem wymagań i ograniczeń wytrzymałościowych, funkcjonalnych, energetycznych, ekonomicznych i innych. Niestety ograniczenia te są z reguły nieliniowe ze względu na zmienne, zadanie jest więc nieliniowe.

5. Metody rozwiązywania

Zadania optymalizacji statycznej współcześnie doczekały się szeregu efektywnych algorytmów rozwiązywania; są to metody gradientowe, przeglądu zupełnego i losowego, a także metody sztucznej inteligencji (algorytm genetyczny, mrówkowy, algorytm roju cząstek, a także rekurencyjne sieci neuronowe).

Do rozwiązywania zadań optymalizacji dynamicznej mogą być wykorzystane [1, 2, 3, 4, 11]:

- metody rachunku wariacyjnego,

- metoda programowania dynamicznego opracowana przez R. Bellmana lub
- zasada maksimum Pontriagina.

Ze względu na trudności obliczeniowe i ograniczony zakres zastosowań tych metod poszukuje się uproszczeń zadania.

Jednym z nich jest dyskretyzacja zmiennych niezależnych, co prowadzi do sformułowania zadania w postaci zadania optymalizacji statycznej – tak zrobiono w dołączonych przykładach.

Spektakularnym przykładem jest programowanie oparte na paradygmacie Bellmana w wersji dyskretnej.

Jeszcze silniejszym uproszczeniem optymalizacji procesu jest przyjęcie, że sygnały sterujące są znane (zmienne w czasie lub stałe), a poszukuje się nastaw układu i/lub parametrów konstrukcyjnych.

6. Uproszczenia: optymalizacja statyczna

Ze względu na trudności obliczeniowe zadania optymalizacji dynamicznej szuka się innych ujęć, na przykład:

a) Dyskretyzacja przestrzeni zmiennych niezależnych

Przedział [0, T] arbitralnie dzieli się na skończony zbiór odcinków Δt_m, tak że $\sum_{1}^{M} \Delta t_m = T$. W przypadku kilku zmiennych niezależnych (tzn. wektora *Z*) jest to arbitralny podział przestrzeni Z na skończoną liczbę 1,..., n,..., N podobszarów. Przyjmuje się, że w każdym przedziale zmiennej niezależnej funkcje sterowań są stałe: $u_k(t) = \text{const}$, k = 1,...,K, i te wartości są zmiennymi decyzyjnymi. Powstaje zadanie optymalizacji statycznej, jednak ze znaczną liczbą zmiennych decyzyjnych.

Dążenie do zwiększenia dokładności rozwiązania skutkuje koniecznością podziału na małe przedziały. Przy kilku zmiennych niezależnych $Z = \{z_1, z_2, z_3, t\}$ i przy dyskretyzacji przestrzeni Z na wielką liczbę podobszarów N powstaje problem obliczeniowy. Metody przeglądu zupełnego stają się nieefektywne. Pomocna jest wtedy zasada optymalności Bellmana [1] i oparte na niej programy komputerowe.

b) Optymalizacja parametrów

Funkcje sterowań przyjmuje się stałe w całym przedziale zmiennej niezależnej [0, T]: $u_k(t) = \text{const}$, k = 1,..., K, natomiast jako zmienne decyzyjne przyjmuje się tylko parametry $p = \{p_1, ..., p_z\}$. co naturalnie dramatycznie zawęża zakres zadania. Jest to także zadanie optymalizacji statycznej, jednak ze znacznie mniejszą liczbą zmiennych decyzyjnych.

We wszystkich przypadkach zależności ujęte w modelu procesu z reguły mają postać nieliniowych równań różniczkowych, a przy dokładniejszym modelu są to równania cząstkowe. Ponadto często równania są nieciągłe (np. w opisie tarcia suchego, histerezy czy luzu). W związku z tym nawet najprostsza postać zadania optymalizacji nastręcza znaczne kłopoty obliczeniowe. Można je pokonać przez wykorzystanie komputerowych procedur całkowania równań nieliniowych. Są one zawarte w pakietach symulacyjnych. W tej pracy pokażemy ich zastosowanie.

7. Sformułowanie zadania polioptymalizacji [9]

W przypadku polioptymalizacji operuje się następującymi pojęciami.

Zbiór wariantów dopuszczalnych D

Dany zbiór wariantów dopuszczalnych D, alternatywnie w jednej z dwóch postaci:

1) jako zbiór przeliczalny (skończony), określony bezpośrednio (przez wyliczanie):

$$D = \{a_d,\ d = 1,\dots, v\} \tag{14}$$

gdzie a_d są wariantami dopuszczalnymi (patrz wzór (10.2)) lub

2) jako zbiór nieprzeliczalny (nieskończony), określony pośrednio (przez ograniczenia):

$$D = \{x = (x_1,\dots, x_n): g_i(x) \geq 0\ i = 1,\dots, I \cap f_j(x) = 0\ j = 1,\dots, J\} \tag{15}$$

gdzie $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$ jest zbiorem zmiennych decyzyjnych (patrz wzór (10.8)), $g_i(x) \geq 0\, i = 1,\dots, I$ jest zbiorem ograniczeń nierównościowych $f_j(x) = 0\ j = 1,\dots, J$ $g_i(x) \geq 0\, i = 1,\dots, I$ jest zbiorem ograniczeń równościowych.

Kryteria oceny K:

$$K = \{k_1, k_2,\dots, k_m\} \tag{16}$$

Dla każdego kryterium oceny k_1, ..., k_m określamy czy ma być minimalizowane czy maksymalizowane.

Funkcja użyteczności:

$$u_i : [k_{i\,min}, k_{i\,max}] \longrightarrow [0,1] \quad i = 1,\dots, m \tag{17}$$

Relacja dominowania

Relację dominowania $\succ$ wariantu v nad wariantem u definiujemy jako taki przypadek, gdy dla wszystkich kryteriów oceny k_i wartości funkcji użyteczności u dla wariantu v (czyli $u(k_{iv})$) są nie gorsze niż dla wariantu u i jednocześnie istnieje takie jedno kryterium k_j, dla którego wartość funkcji użyteczności dla wariantu v jest lepsza niż dla wariantu u.

$$\mathrm{d_v} \succ \mathrm{d_u} \Leftrightarrow \left\{ \underset{i\in[1,m]}{\exists} \mathrm{u}(\mathrm{k_{iv}}) \geq (\mathrm{k_{iu}}) \right\} \wedge \left\{ \underset{j\in[1,m]}{\forall} \mathrm{u}(\mathrm{k_{jv}}) > \mathrm{u}(\mathrm{k_{ju}}) \right\} \tag{18}$$

Wariant polioptymalny (w sensie Pareto) $\mathbf{d_p}$

Wariant d_p jest wtedy polioptymalny, gdy nie można znaleźć w zbiorze wariantów dopuszczalnych D takiego wariantu d_z, który by dominował nad wariantem d_p:

$$d_P = d \in D : \{ \neg \forall d_z \in D : \ \mathrm{d_z} \succ \ d_P \} \tag{19}$$

Rozwiązanie zadania polioptymalizacji: zbiór P

Rozwiązaniem zadania polioptymalizacji jest ogół wariantów polioptymalnych:

$$\mathrm{D} \supset \mathrm{P} = \{\mathrm{d_P}\} \tag{20}$$

Sformułowanie uproszczonego zadania polioptymalizacji

Sformułowanie zadania polioptymalizacji dynamicznej jest następujące: należy znaleźć takie funkcje u_j i takie parametry p, aby kryteria cząstkowe miały wartości ekstremalne dla określonych przedziałów zmiennych niezależnych, przy spełnieniu ograniczeń na funkcje zmiennych wyjściowych oraz na funkcje zmiennych sterujących.

Ponieważ zadanie optymalizacji dynamicznej jest z reguły trudne do rozwiązania, choćby ze względu na nieliniowości modelu matematycznego oraz równania różniczkowe (nierzadko cząstkowe), dokonuje się dyskretyzacji zmiennych niezależnych i poszukuje się kolejnych wartości zmiennych sterujących jako skończonych ciągów ich wartości – i to jest uproszczone zadanie polioptymalizacji statycznej.

8. Przykład. Siłownik pneumatyczny: konstrukcja i sterowanie [10]

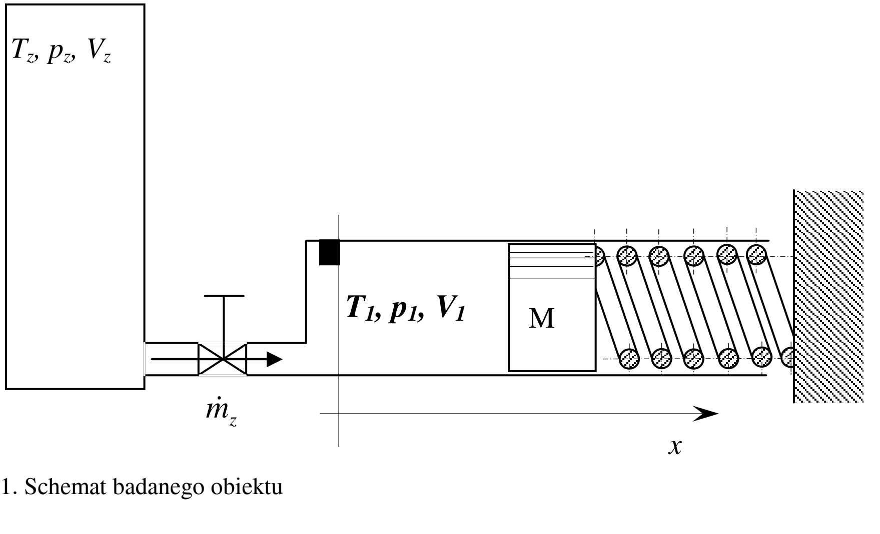
8.1. Wstęp

Napędy pneumatyczne opisywane są dość złożonymi modelami matematycznymi. Ta złożoność wynika z silnie nieliniowych zjawisk przepływu gazu, wymiany ciepła i masy, tarcia suchego i lepkiego oraz zderzeń tłoka z ogranicznikami ruchu. Pogorszenie dokładności modelu spowodowane jest niewystarczająco rozpoznanym i nie dość dokładnym opisem własności dynamicznych i statycznych obciążenia zewnętrznego, a także mało dokładnym opisem innych zakłóceń. Efekty działania napędu zależą jednocześnie od konstrukcji i od sterowania. Ten drugi aspekt powoduje, że należy formułować zadanie optymalizacji dynamicznej.

Najczęściej dyskusyjne są także kryteria optymalizacji. Powoduje to, że należy formułować zadanie optymalizacji wielokryterialnej, a najlepiej zadanie polioptymalizacji, która prowadzi do zbioru rozwiązań kompromisowych [9].

8.2. Model matematyczny obiektu

Na rysunku 1 przedstawiono schemat badanego obiektu. Ponieważ analizowany jest tylko ruch roboczy tłoka siłownika (napełnianie komory siłownika), dla prostoty pominięto nieistotne dla procesu modelowania elementy instalacji.



Rys. 1. Schemat badanego obiektu

Analizując zjawiska, które zachodzą w komorach (rys. 1) możemy zapisać ciśnienie i temperaturę gazu w komorze zasilającej [5]:

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{\kappa \cdot R}{V_z} \cdot \left[-T_z \cdot \dot{m}_{z,1} \right] \tag{21}$$

$$\frac{dT_z}{dt} = \frac{T_z}{p_z \cdot V_z} \cdot \left[V_z \cdot \frac{dp_z}{dt} + R \cdot T_z \cdot \dot{m}_{z,1} \right] \tag{22}$$

ciśnienie i temperaturę gazu w komorze siłownika:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\kappa \cdot R}{V_1} \cdot \left[T_z \cdot \dot{m}_{z,1} - \frac{p_1}{R} \cdot \frac{dV_1}{dt} \right] \tag{23}$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{T_1}{p_1 \cdot V_1} \cdot \left[V_1 \cdot \frac{dp_1}{dt} + p_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} - R \cdot T_1 \cdot \dot{m}_{z,1} \right] \tag{24}$$

ruch tłoka i związanych z nim elementów:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \left(F_p + F_o \right) / M \tag{25}$$

gdzie: p – ciśnienie absolutne [Pa],
R – indywidualna stała gazowa [J/(kg·K)],
T – temperatura absolutna [K],
κ – wykładnik adiabaty [–].
V_1 – objętość [m^3], przy czym

$$V_1 = 0.25 \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \left(osz + x \right) \tag{26}$$

D – średnica cylindra [m],
osz – długość przestrzeni szkodliwej [m],
s – skok tłoka siłownika [m],
x – współrzędna położenia tłoka [m],
dV_1/dt – szybkość zmian objętości komory [m^3/s], przy czym

$$\frac{dV_1}{dt} = 0.25 \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \frac{dx}{dt} \tag{27}$$

dx/dt – prędkość ruchu tłoka [m/s],
F_p – siła od ciśnień panujących w obu komorach [N]

$$F_p = 0.25 \cdot \pi \cdot \left[D^2 \cdot \left(p_1 - p_a \right) \right] \tag{28}$$

F_o – suma sił sprężystości sprowadzona do osi tłoczyska [N]

$$F_o = F_{nw} + k \cdot x \tag{29}$$

F_{nw} – siła wstępnego napięcia sprężyny [N],
K – współczynnik sztywności sprężyny [N/m],
M – masa elementów ruchomych [kg].

Na podstawie modelu matematycznego obiektu i procesu utworzono model komputerowy. Wybrano środowisko MATLAB i za pomocą SIMULINK-a utworzono model w postaci graficznej.

8.3. Kryteria poli-optymalizacji (cząstkowe funkcje celu)

Przyjęto następujące cząstkowe kryteria optymalizacji:
K_1 – czas dojścia tłoka do punktu końcowego (x = s), [s];
K_2 – prędkość układu ruchomego po osiągnięciu punktu końcowego (x = s), [m/s];
K_3 – energia kinetyczna układu ruchomego, [J] (tzn. tłoczyska o stałej masie i dołączonej masie MDod), w punkcie x = xdob,
K_4 – zużycie energii do wykonania cyklu pracy; jego miarą może być ilość powietrza w komorze roboczej siłownika, [kg].

Eksperymenty optymalizacyjne (polioptymalizacja przy dwu kryteriach: K_1 i K_4) wykazały, że uzyskuje się jedno rozwiązanie, co oznacza, że te dwa kryteria nie są konfliktowe, więc można jedno z nich pominąć w dalszych poszukiwaniach. Kryterium K_3 ma silne powiązanie z procesem technologicznym, dla którego określona jest dolna granica energii pozwalającej na realizację procesu. Dlatego K_3 może być na wstępnym etapie badań traktowane jako ograniczenie. Przyjęto wiec dwa kryteria:

F(1) = K_1 – czas skoku na odległość 3 m;
F(2) = K_2 – prędkość układu ruchomego po osiągnięciu punktu końcowego.

8.4. Zmienne decyzyjne

Sformułowano zastępcze równoważne zadanie optymalizacji statycznej z następującymi zmiennymi decyzyjnymi:
- parametry procesu – kolejne otwarcia (pola powierzchni przepływu) zaworu $f(x_i)$ w kolejnych dyskretnych położeniach tłoka i = 1, …, n;
- parametry konstrukcyjne – masa dodana MDod, [kg], sztywność dołączonej sprężyny k, [N/m] oraz średnica cylindra D, [m].

8.5. Ograniczenia funkcyjne

Ograniczeniami funkcyjnymi w procesie optymalizacji były:
- prędkość układu ruchomego po osiągnięciu punktu końcowego nie może przekroczyć pewnej wartości dopuszczalnej, np. 0,15 m/s;

– energia kinetyczna układu ruchomego w określonym punkcie (położeniu) na drodze tłoka powinna mieć co najmniej pewną minimalną wartość E_{min}, aby układ mógł wykonać zadanie robocze.

Ograniczenia przedziałowe na zmienne decyzyjne przyjęto na podstawie doświadczenia i intuicji: arbitralnie przyjęto następujące przedziały wartości zmiennych decyzyjnych:

– otwarcia zaworu (pola powierzchni otwarcia f(xi) z przedziału: [0.0001*PoleMax PoleMax] gdzie PoleMax = 3e-5; x(1) … x(n);
– masa dodatkowa x(n+1) z przedziału: [0 40];
– średnica cylindra x(n+2) z przedziału: [0 .10];
– sztywność sprężyny z przedziału: [10 4000].

8.6. Wybór systemu optymalizacji

W pakiecie MATLAB algorytmy gradientowe okazały się nieefektywne obliczeniowo.

W środowisku MATLAB'a wybrano toolbox Popova [6] w wariancie optymalizacji wielokryterialnej. Wykorzystano funkcje GAMOminBC bądź GAMOminSC z następującymi wartościami wielkości sterujących algorytmem genetycznym:

opt.MaxIter = 10 - 50;
opt.Select = .5;
opt.Best.Rate = 1;
opt.Graphics='on';
opt.PopulSize= 10 - 45;
opt.MutatRate: 0.1 - 1;
opt.TolX=0;

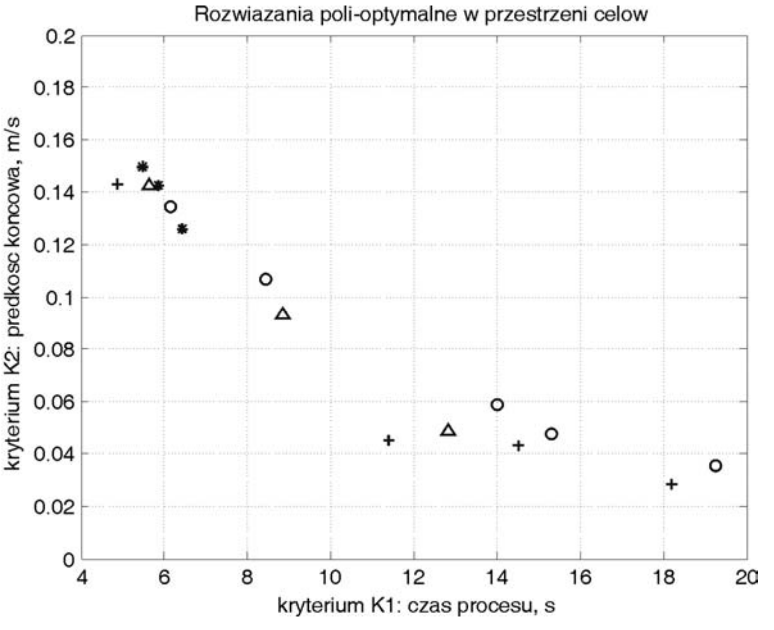
8.7. Wyniki

Końcowe warianty polioptymalne pokazano na rysunku 2.

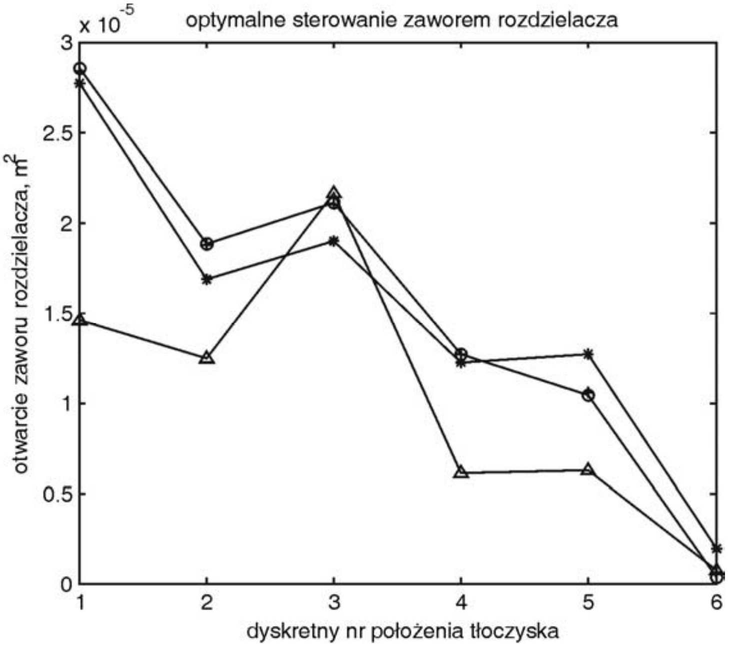
Przetestowano stosowaną procedurę optymalizacji dla różnej liczby:

- przedziałów sterowania *n*;
- generacji algorytmu genetycznego *Iter*;
- osobników (wielkość populacji) *Pop*.

Z rysunku widać, że wzrost liczby przedziałów (większe *n*) poprawia wyniki optymalizacji, co jest intuicyjnie oczekiwane. Przebieg funkcji sterujących $f(x_i)$ w kolejnych dyskretnych położeniach tłoka i = 1, …, n pokazuje rysunek 3, a wartości innych parametrów traktowanych jako zmienne decyzyjne podano w tabeli 1.



Rys. 2. Rozwiązania polioptymalne przy różnych parametrach sterujących procesem optymalizacji: o – n = 4, Iter = 10; Pop = 45; + oraz * – n = 6, Iter = 10; Pop = 35; ^ – n = 4, Iter = 10; Pop = 25 (Pop – liczność populacji; Iter – liczba iteracji)



Rys. 3. Przykładowe polioptymalne sygnały sterowania zaworem (oznaczenia w tabeli 1)

Tabela 1. Wartości parametrów konstrukcyjnych napędu

Symbol rozwiązania	K1 [s]	K2 [m/s]	MDod [kg]	D [m]	k [N/m]
o	18.2042	0.0283	1.8151	0.0655	139.3943
+	11.3940	0.0451	1.8130	0.0655	142.3429
*	4.8682	0.1431	1.7823	0.0670	171.4724
^	14.5119	0.0434	3.0288	0.0663	209.1239

Praktycznie rozwiązanie drugie (+) jest powtórzeniem rozwiązania pierwszego (o) (podobne wartości [D, k]), co jest rezultatem losowego charakteru algorytmu genetycznego.

Wnioski

1. Zakresem optymalizacji powinien być jednocześnie i proces, i obiekt, w którym ten proces przebiega. Oznacza to, że należałoby rozwiązywać zadanie optymalizacji dynamicznej, co jest w praktyce niezwykle trudne;
2. Zamiana zadania optymalizacji dynamicznej na zadanie optymalizacji statycznej [7] powoduje wielość zmiennych decyzyjnych, co skutkuje złożonością obliczeniową zadania. W przypadku nieróżniczkowalności modelu matematycznego ze względu na zmienne decyzyjne nie można wykorzystać efektywnych metod gradientowych, konieczne jest więc użycie innych algorytmów: przeglądu losowego bądź algorytmów ewolucyjnych.
   Mimo opisanych wyżej problemów stwierdzić można, że:
   - możliwe i celowe jest jednoczesne uwzględnianie w optymalizacji (polioptymalizacji) zmiennych parametrów procesu i parametrów konstrukcji;
   - optymalizacja daje wielkie korzyści mierzone poprawą osiągów projektowanego układu;
   - w przypadku złożonych układów o silnie nieliniowych zależnościach polioptymalizacja może efektywnie wspomóc konstruowanie intuicyjne.
3. Przez dyskretyzację zmiennych niezależnych można zadanie sformułować jako zadanie (poli-)optymalizacji statycznej, stosunkowo łatwe do rozwiązania.
4. Istotne dla dokładności takiego uproszczonego zadania jest sposób dyskretyzacji zmiennych niezależnych.
5. Bardzo uniwersalnym algorytmem (poli-)optymalizacji statycznej – choć obliczeniowo czasochłonnym – jest algorytm genetyczny.

Bibliografia

1. Bellman R. E., Dreyfus S. E.: Programowanie dynamiczne. PWE, Warszawa 1967.
2. Bołtianski W. G.: Matematyczne metody sterowania optymalnego. WNT, Warszawa 1971.
3. Elsgolc L. E.: Rachunek wariacyjny. PWN, 1960.
4. Kaczorek T.: Teoria sterowania. t. 2, PWN, Warszawa 1981.
5. Kiczkowiak T.: Algorytmy i modele w projektowaniu pneumatycznych układów napędowych. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2005.
6. Popov Andrey: http://www.tu-harburg.de/~rtsap
7. Tarnowski Wojciech: Static optimisation of non–linear processes by simulation. Modelling and simulation: a tool for the next millennium. 13th European simulation multiconference. Warszawa, 01–04.06.1999 r., s. 513–518.
8. Tarnowski W.: Symulacja i optymalizacja w MATLAB-ie. Wydawnictwo Fundacja Wyższej Szkoły Morskiej w Gdyni, Gdynia 2001.
9. Tarnowski W.: Optymalizacja i polioptymalizacja w Mechatronice. Oficyna Wydawn. Pol. Koszalińskiej, Koszalin 2009, s.172–176.
10. Tarnowski W., Kiczkowiak T.: Optymalizacja dynamiczna napędu pneumatycznego. Pneumatyka nr 1 (66) 2008, s. 78–81.
11. Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1978.

Recenzent:
Kazimierz WAĆKOWSKI

Simultaneous optimisation or polyoptimisation of machine and process

Key words

Static optimisation, dynamic optimisation, process optimisation, poly-optimisation, multi-attribute decision-making, mathematical modelling.

Summary

A premise of this work is that, in design, it is reasonable to optimise parameters of a machine and control functions (or exploitation parameters) in one common optimisation task.

Static and dynamic optimisation tasks are defined in the paper, and poly-optimisation task, as well. The last is a Multi-Attribute Decision Making (MADM) problem. On the basis of a concise survey of the dynamic optimization methods, it is argued that a discretisation of the decision space (i.e. the independent variables space) is an efficient way to transform a dynamic problem to a static optimisation problem, which is easier to resolve, even with many decision variables.