



Analiza statyki i dynamiki belek żelbetowych z uwzględnieniem modelu hipotetycznego materiału zastępczego

JAROSŁAW SIWIŃSKI, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
Katedra Budownictwa, 00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,
jaroslaw.siwinski@wat.edu.pl, adam.stolarski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy zawarto analizy numeryczne belek żelbetowych modelowanych z wykorzystaniem hipotetycznego modelu jednorodnego materiału zastępczego. Wyznaczono parametry statyczno-odkształceniowo-wytrzymałościowe materiału zastępczego dla rozważanych belek żelbetowych. Przeprowadzono analizę numeryczną w zakresie obciążeń statycznych oraz dynamicznych. Wyniki analizy numerycznej pod obciążeniem statycznym porównano z wynikami doświadczalnymi Buckhouse'a oraz innymi wynikami numerycznymi. Wyniki analizy numerycznej pod obciążeniem dynamicznym porównano z wynikami doświadczalnymi Emricha, Hertera i Puffera oraz wynikami innych analiz teoretycznych. W analizach dynamicznych uwzględniono stały współczynnik dynamiczny wytrzymałości hipotetycznego materiału zastępczego.

Słowa kluczowe: budownictwo, konstrukcje budowlane, analiza numeryczna, belki żelbetowe, belki z jednorodnego materiału zastępczego, statyka, dynamika

DOI: 10.5604/12345865.1223089

1. Wstęp

Modelowanie mechanizmu zachowania belek obciążonych statycznie i dynamicznie ma istotny wpływ na procesy projektowania oraz oceny bezpieczeństwa konstrukcji. W przypadku wykorzystania metod numerycznych wyróżnić możemy metody rozwiązania dla wydzielonych elementów konstrukcyjnych belkowych, prętowych lub płaskich płytowych i tarczowych uzyskiwane metodą różnic skończonych (MRS) lub metodą elementów skończonych (MES). Przykłady rozwiązań

MRS zadań dynamiki żelbetowych belek i układów prętowych zawierają m.in. prace Bąka i Stolarskiego [2, 3]. Przedstawiono w nich pełną procedurę modelowania, zaczynając od opisu dynamicznego zachowania materiałów konstrukcyjnych: betonu (Stolarski [13, 14]) i stali zbrojeniowej (Bąk i Stolarski [1]), poprzez opis współpracy materiałów konstrukcyjnych w elementach żelbetowych, opis układu równań ruchu, do opracowania metody rozwiązania, zbudowania własnych procedur i programów numerycznych oraz opracowania przykładów rozwiązań elementów konstrukcyjnych wraz z porównaniami do wyników dynamicznych badań doświadczalnych belek żelbetowych Emricha, Hertera i Puffera [6]. Sposób zachowania modelu numerycznego układu konstrukcyjnego zależy ściśle od zastosowanego modelu materiałowego, który stanowi integralną część procedury modelowania mechanizmu zachowania elementów konstrukcyjnych.

W związku z trudnościami modelowania właściwości skomplikowanych układów konstrukcyjnych budynków o konstrukcji żelbetowej oraz ich elementów składowych, m.in. belek konstrukcyjnych, stosowane jest podejście polegające na homogenizacji żelbetu. Podejście bazujące na homogenizacji konstrukcji żelbetowej zaprezentowano m.in. w pracy Combescure'a, Dumonteta i Voldoire'a [5]. Autorzy opracowania zastosowali podział elementu żelbetowego na wysokości przekroju poprzecznego na warstwy o różnych właściwościach wytrzymałościowych. W strefach występowania zbrojenia zamiast prętów stalowych zastosowano zwiększone parametry wytrzymałościowe betonu, tworząc materiał warstwowy. Zauważyć należy jednak, że przy takim podejściu model materiału zastępczego jest nadal niejednorodny ze względu na zróżnicowaną wytrzymałość warstw. Inne podejście homogenizacyjne zastosowano w pracy Kellihera i Suttona-Swabiego [8], którzy z kolei powołują się na pracę Luccioni, Ambrosiniego i Danesiego [10]. W pracach tych zastosowano zastępczy materiał jednorodny ze zwiększoną wytrzymałością na rozciąganie i zwiększonym modułem odkształcenia w porównaniu do materiału wyjściowego (betonu). Procedura wyznaczania parametrów materiału zastępczego polegała na określeniu charakterystyki statyczno-wytrzymałościowej materiału każdorazowo dla badanego obiektu, dla którego przeprowadza się bardziej szczegółowe obliczenia jednego, wybranego elementu uznanego za najbardziej krytyczny element konstrukcji i następnie dostosowuje się parametry materiału zastępczego w taki sposób, aby uzyskać podobne rozkłady naprężeń i odkształceń jak w elemencie żelbetowym. W literaturze znane są również opracowania dotyczące podstaw teorii homogenizacji w mechanice ośrodków niejednorodnych, Strzelecki i in. [16], oraz zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał, np. Łydzba [11]. W odniesieniu do elementów żelbetowych i elementów z periodyczną mikrostrukturą w pracach Urbańskiego [18, 19] zastosowano ujednoczone sformułowanie wariacyjne problemu homogenizacji metodą elementów skończonych.

Celem niniejszej pracy jest opracowanie metodyki homogenizacji belkowych elementów żelbetowych polegającej na zastąpieniu niejednorodnej kompozycji

betonu i stali zbrojeniowej jednorodnym materiałem zastępczym. Weryfikację modelu hipotetycznego materiału zastępczego przeprowadzono na podstawie analizy porównawczej zachowania belek z tego materiału i wyników badań doświadczalnych belek żelbetowych obciążonych statycznie Buckhouse'a [4] oraz belek obciążonych dynamicznie Emricha, Hertera i Puffera [6].

2. Metodyka modelowania jednorodnego materiału zastępczego

Podstawą metodyki homogenizacji belkowych elementów żelbetowych jest sposób określenia właściwości odkształceniowo-wytrzymałościowych materiału zastępczego. Polega on na modyfikacji parametrów dowolnego modelu betonu, np. powszechnie stosowanego w oprogramowaniu Abaqus modelu Lubliner'a i in. [9], z wykorzystaniem zaproponowanej funkcji homogenizacyjnej, której współczynnikiem homogenizacji jest efektywny stopień zbrojenia belki żelbetowej.

Funkcja homogenizacyjna przekształca parametry materiałów składowych żelbetu: betonu p_c (wytrzymałość betonu na ściskanie — f_c wytrzymałość betonu na rozciąganie — f_{ct} , moduł odkształcenia — E_c , współczynnik odkształcalności poprzecznej — ν_c , ciężar objętościowy — γ_c) i stali zbrojeniowej p_s (granica plastyczności — f_y , moduł odkształcenia — E_s , ciężar objętościowy — γ_s) w odpowiednie parametry jednorodnego materiału zastępczego p_z w następujący sposób:

$$p_z = p_c + \rho_{eff} p_s. \quad (1)$$

Przy założeniu zróżnicowanych wartości granic plastyczności stali podłużnego zbrojenia głównego f_y usytuowanego w kierunku $i = 1$ oraz poprzecznego zbrojenia strzemionami $f_{yw} \leq f_y$, usytuowanymi w kierunkach pionowym $i = 2$ i poziomym $i = 3$, efektywny stopień zbrojenia belki żelbetowej określa następująca zależność:

$$\rho_{eff} = \sqrt{(\rho_1)^2 + \left(\rho_2 \frac{f_{yw}}{f_y}\right)^2 + \left(\rho_3 \frac{f_{yw}}{f_y}\right)^2}, \quad (2)$$

gdzie: ρ_i — stopnie zbrojenia belki w kierunkach $i = 1, 2, 3$.

Dynamiczne cechy wytrzymałościowe materiału zastępczego $p_{zf,d}$ definiuje się w sposób uproszczony poprzez wprowadzenie stałego i jednego dla całego elementu współczynnika dynamicznego k_d wyłącznie dla statycznych parametrów wytrzymałościowych i modułu odkształcenia materiału zastępczego p_{zf} (wytrzymałość na ściskanie — f_z , wytrzymałość na rozciąganie — f_{zt} , moduł odkształcenia — E_z) według zależności:

$$p_{zf,d} = p_{zf} k_d. \quad (3)$$

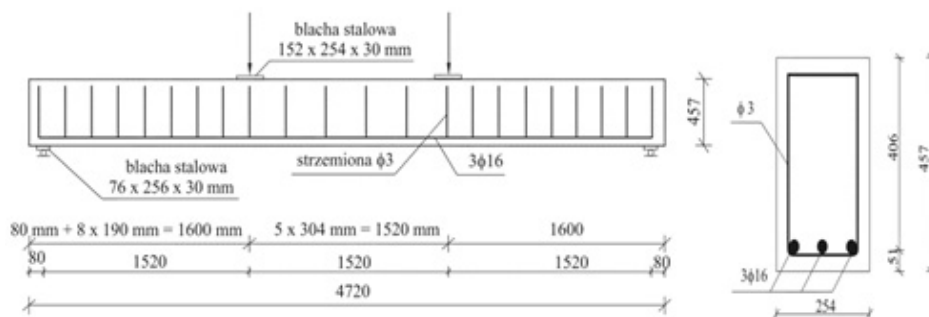
3. Modelowanie zachowania belek

Wyznaczenie parametrów jednorodnego materiału zastępczego umożliwia modelowanie zachowania belek w zakresie obciążeń statycznych oraz dynamicznych.

Modelowanie przeprowadza się z wykorzystaniem oprogramowania systemowego Abaqus wg następującej procedury: 1 — dobór modelu materiałowego, który przyjęto jako model kontynualnego zniszczenia betonu według Lubliner'a i in. [9], o zmodyfikowanych parametrach określonych według formuły (1) i ewentualnie (3); 2 — dobór odpowiedniego podziału przestrzennego elementu konstrukcyjnego na elementy skończone; 3 — dobór odpowiedniego typu elementów skończonych do analizowanego zadania; 4 — dobór metody rozwiązania w zakresie obciążeń statycznych (metoda Newtona-Raphsona) lub dynamicznych (całkowanie równań ruchu metodą jawną); 5 — przeprowadzenie analizy porównawczej wyników otrzymanych numerycznie z wynikami doświadczalnymi lub innymi wynikami numerycznymi.

4. Wyniki badań w zakresie obciążeń statycznych

Analizie statycznej poddano belkę Buckhouse'a, której schemat statyczny, przekrój poprzeczny oraz dane materiałowe przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat statyczny i przekrój belki Buckhouse'a

Właściwości materiałowe przyjęte dla betonu i stali: $f_c = 32,9$ MPa — wytrzymałość betonu na ściskanie, $f_{ct} = 3,6$ MPa — wytrzymałość betonu na rozciąganie, $E_c = 27,23$ GPa — moduł odkształcenia podłużnego betonu, $\nu_c = 0,2$ — współczynnik Poissona dla betonu, $\gamma_c = 2400$ kg/m³ — masa właściwa betonu, $f_y = 473,26$ MPa — granica plastyczności stali, $E_s = 236,61$ GPa — moduł odkształcenia podłużnego stali, $\nu_s = 0,3$ — współczynnik Poissona dla stali, $\gamma_s = 7850$ kg/m³ — masa właściwa stali.

Stopnie zbrojenia dla kierunków $i = 1, 2, 3$ (podłużnego, poprzecznego pionowego i poprzecznego poziomego) są równe odpowiednio:

$$\rho_1 = \frac{A_s}{bd} = 0,0057; \quad \rho_2 = \frac{\sum A_{sw}}{bs} = 0,00025; \quad \rho_3 = \frac{\sum A_{sw}}{hs} = 0,00016$$

i wyznaczają według (2) efektywny stopień zbrojenia:

$$\rho_{eff} = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 + (\rho_3)^2} = 0,00571,$$

na którego podstawie określono według zależności (1) parametry materiału zastępczego.

Zgodnie z formułą (1) wartości wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie oraz moduł odkształcenia, współczynnik Poissona i masa właściwa materiału zastępczego są następujące:

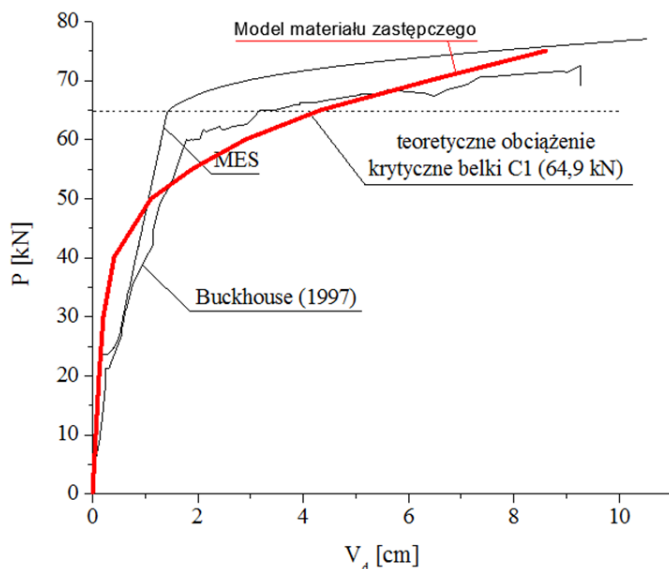
$$\begin{aligned} f_{zc} &= 35,6 \text{ MPa}; & f_{zt} &= 6,3 \text{ MPa}; & E_z &= 28,58 \text{ GPa}; \\ \nu_z &= 0,2017; & \gamma_z &= 2445 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Model obliczeniowy belki został opracowany z wykorzystaniem podziału przestrzennego na elementy skończone sześciennie typu C3D8R (elementy 8-węzłowe). W modelu tym wykorzystano podział siatki elementów skończonych na elementy bryłowe typu HEX o wymiarach $\sim 50 \times 50$ mm. W belce wykorzystano 4298 elementów skończonych połączonych (współpracujących) w 5912 węzłach. Do rozwiązania zadania zastosowano metodę Newtona-Raphsona.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych otrzymano wykres przemieszczenia środka belki w funkcji obciążenia (rys. 2).

Możemy zauważyć dobrą zgodność otrzymanych wyników numerycznych w porównaniu z wynikami doświadczalnymi Buckhouse'a dla belki doświadczalnej oznaczonej jako C1 oraz innym rozwiązaniem numerycznym oznaczonym jako MES i teoretycznym obciążeniem krytycznym oznaczonym linią kropkowaną, zaczerpniętymi z pracy Smarzewskiego [12].

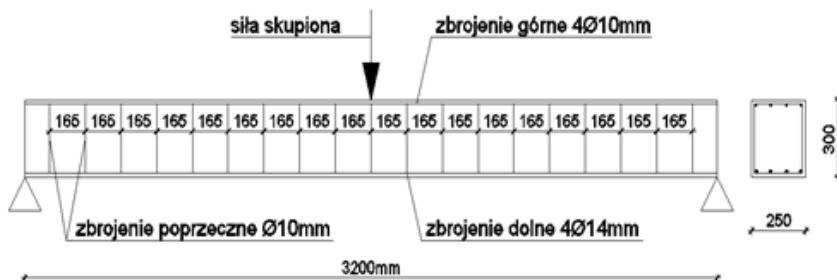
W trakcie trwania doświadczenia Buckhouse'a zauważono, że belka żelbetowa w górnej strefie uległa zmiążdżeniu. W doświadczeniu numerycznym przyjęto, że odzwierciedleniem efektu zmiążdżenia materiału zastępczego będzie osiągnięcie przez naprężenia zredukowane w strefie ściskanej materiału zastępczego wartości naprężeń przekraczającej wytrzymałość betonu na ściskanie. Belka osiąga tak zdefiniowane umowne naprężenia niszczące na całej szerokości górnej powierzchni, pomiędzy miejscami przyłożenia sił, przy wartości obciążenia 75,6 kN i wartości przemieszczeń w środku rozpiętości belki 88,43 mm.



Rys. 2. Wykres przemieszczenia środka belki w funkcji przemieszczenia

5. Wyniki badań w zakresie obciążeń dynamicznych

Przedmiotem analizy numerycznej jest porównanie wyników uzyskanych na podstawie analiz komputerowych belki z materiału zastępczego z wynikami doświadczalnymi belki żelbetowej uzyskanymi przez Emricha, Hertera i Puffera [6], oznaczonymi w doświadczeniu jako TEST 115, oraz z wynikami innych analiz teoretycznych (Bąk i Stolarski [2]).



Rys. 3. Schemat statyczny i układ zbrojenia belki Emricha, Hertera i Puffera

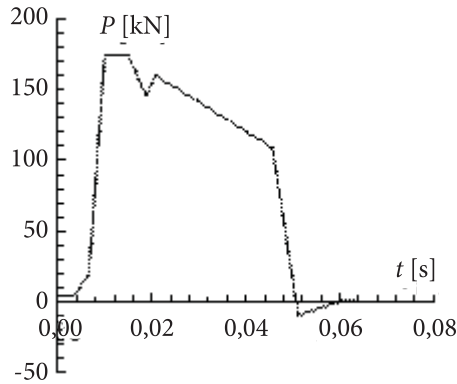
Schemat statyczny, wymiary oraz układ zbrojenia belki doświadczalnej przedstawiono na rysunku 3.

Parametry materiałowe użyte w doświadczeniu są następujące: $f_c = 41$ MPa — wytrzymałość betonu na ściskanie, $E_c = 39$ GPa — moduł odkształcenia, $f_y = 420$ MPa — granica plastyczności stali, $\gamma_c = 2400$ kg/m³ — masa właściwa żelbetu.

Wytrzymałość betonu na rozciąganie wyznaczono według zależności — Godycki-Ćwirko [7]:

$$f_{ct} = 0,464\sqrt[3]{f_c^2} = 5,52 \text{ MPa.} \quad (5)$$

Analizowana belka została obciążona dynamicznie siłą skupioną, której zmienność w czasie przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Zmiana obciążenia w czasie

Na podstawie danych materiałowych oraz opracowanej metody homogenizacji żelbetu wyznaczono niezbędne parametry materiału zastępczego.

Stopnie zbrojenia dla kierunków $i = 1, 2, 3$ (podłużnego, poprzecznego pionowego i poprzecznego poziomego) są równe odpowiednio:

$$\rho_1 = \frac{A_s}{bd} = 0,0124; \quad \rho_2 = \frac{\sum A_{sw}}{b_s} = 0,00416; \quad \rho_3 = \frac{\sum A_{sw}}{h_s} = 0,00347.$$

Wyznaczają one na podstawie (2) efektywny stopień zbrojenia:

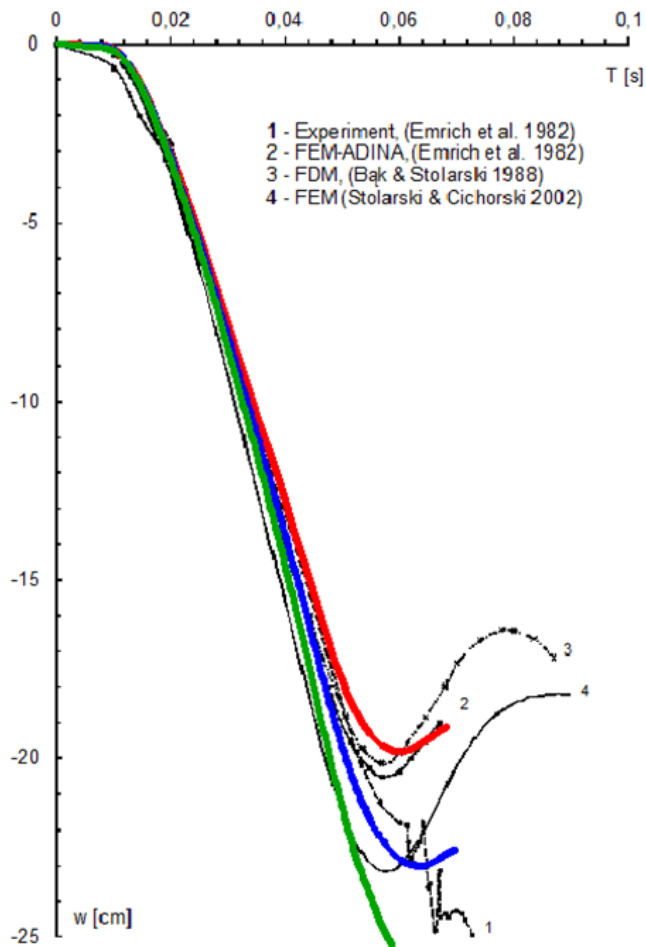
$$\rho_{eff} = \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 + (\rho_3)^2} = 0,0135.$$

Następnie określono według zależności (1) wytrzymałość na ściskanie i rozciąganie oraz moduł odkształcenia, współczynnik Poissona i masę właściwą materiału zastępczego:

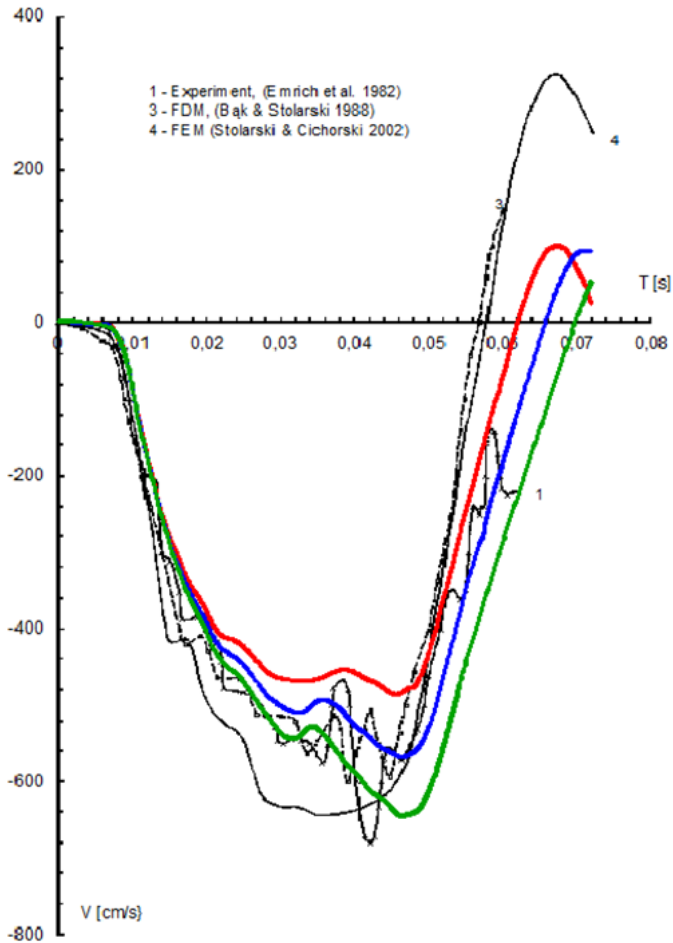
$$\begin{aligned}
 f_{zc} &= 46,7 \text{ MPa}; & f_{zt} &= 11,2 \text{ MPa}; & E_z &= 41,71 \text{ GPa}; \\
 \nu_z &= 0,2041; & \gamma_z &= 2506 \text{ kg/m}^3.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Dla modelu materiału zastępczego w uproszczony sposób uwzględniono wpływ prędkości odkształcenia poprzez wprowadzenie pojedynczego współczynnika dynamicznego do wytrzymałości i modułu odkształcenia materiału zastępczego na ściskanie i rozciąganie wg zależności (3):

$$f_{z_c,d} = k_d f_{z_c}; \quad f_{z_t,d} = k_d f_{z_t}; \quad E_{z,d} = k_d E_z.
 \tag{7}$$



Rys. 5. Zmiana w czasie przemieszczeń środka belki



Rys. 6. Zmiana w czasie prędkości przemieszczenia środka belki

Model numeryczny belki został wykonany z sześciennych elementów skończonych typu C3D8R (elementy 8-węzłowe). W modelu wykorzystano podział siatki elementów skończonych na elementy bryłowe typu HEX o wymiarach 30×30 mm. W belce wykorzystano 8480 elementów skończonych współpracujących w 10 953 węzłach. Do rozwiązania zadania zastosowano jawną procedurę całkowania równań ruchu.

Na podstawie przeprowadzonej analizy otrzymano wykres zmiany przemieszczenia w czasie przedstawiony na rysunku 5 oraz zmianę w czasie prędkości przemieszczeń punktu pomiarowego przedstawioną na rysunku 6. Wyniki odczytano w punkcie pomiarowym zlokalizowanym na środku dolnej powierzchni belki (tj. pod siłą skupioną).

Na tych rysunkach linią zieloną oznaczono wyniki analizy dla wartości współczynnika dynamicznego $k_d = 1,1$, linią niebieską — dla wartości współczynnika

dynamicznego $k_d = 1,15$, a linią czerwoną — dla wartości współczynnika dynamicznego $k_d = 1,2$.

W wyniku przeprowadzonej analizy porównawczej stwierdzono bardzo dobrą zgodność uzyskanych wyników z wykorzystaniem materiału zastępczego przy zastosowaniu wartości współczynnika dynamicznego $k_d = 1,15$ (linia niebieska) z wynikami dla belki żelbetowej, tj. wynikami doświadczalnymi (1) oraz wynikami analizy numerycznej MES (4) Stolarskiego i Cichorskiego [15], jak również z wynikami numerycznymi (2) autorów doświadczenia Emricha, Hertera i Puffera [6] uzyskanymi za pomocą programu metody elementów skończonych ADINA oraz z wynikami numerycznymi (3) Bąka i Stolarskiego [2] uzyskanymi za pomocą metody różnic skończonych.

Przeprowadzona analiza dla belki obciążonej dynamicznie wskazuje na bardzo dobrą zgodność wyników uzyskanych za pomocą doświadczenia numerycznego z wykorzystaniem parametrów modelu jednorodnego materiału zastępczego, zmodyfikowanych przez uwzględnienie współczynnika dynamicznego wytrzymałości, w porównaniu z wynikami eksperymentalnymi, jak również z wynikami innych rozwiązań numerycznych zaczerpniętych z literatury.

6. Zakończenie i wnioski

Pierwszym rozważanym doświadczeniem numerycznym była belka doświadczalna Buckhouse'a obciążona statycznie dwiema symetrycznie umiejscowionymi siłami skupionymi. W wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej stwierdzono, że wyniki uzyskane dla modelu jednorodnej belki z materiału zastępczego wykazują bardzo dobrą zgodność maksymalnej siły w stanie nośności granicznej i odpowiadającego przemieszczenia z wynikami doświadczenia Buckhouse'a oraz z wynikami analizy numerycznej Smarzewskiego.

Analizę belki pod obciążeniem dynamicznym przeprowadzono w odniesieniu do doświadczenia Emricha, Hertera i Puffera. Wyznaczono wykresy zmiany w czasie przemieszczeń punktu pomiarowego przy zastosowaniu trzech wartości ustalonego współczynnika dynamicznego k_d oraz przeprowadzono analizę porównawczą z wynikami doświadczenia, a także innymi wynikami analiz numerycznych. Stwierdzono, że największą (kilkuprocentową) zgodność wyników dotyczących zmian przemieszczenia w czasie i zmian prędkości przemieszczenia w czasie uzyskanych w rozwiązaniu otrzymanym przy wykorzystaniu modelu numerycznego belki z materiału zastępczego oraz wyników doświadczalnych i innych rozwiązań numerycznych zaczerpniętych z literatury uzyskano przy wartości współczynnika $k_d = 1,15$. Przedstawiona analiza porównawcza uzasadnia stosowanie modelu jednorodnego materiału zastępczego do przybliżonego modelowania zachowania żelbetowych elementów belkowych.

Efektywność metodyki modelowania konstrukcji przy zastosowaniu jednorodnego materiału zastępczego wskazuje na możliwość jej skutecznego zastosowania do analizy numerycznej złożonych, wielkowymiarowych obiektów budowlanych o konstrukcji żelbetowej.

Praca powstała w wyniku realizacji zadań badawczych w ramach pracy badawczej statutowej nr 934, prowadzonej w Wydziale Inżynierii Lądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej.

Artykuł wpłynął do redakcji 31.03.2016 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 1.07.2016 r.

LITERATURA

- [1] BĄK G., STOLARSKI A., *Delayed yield effect in dynamic flow of elastic/visco-perfectly plastic material*, Archives of Mechanics, 37, 4-5, 1985, 285-302.
- [2] BĄK G., STOLARSKI A., *Nieliniowa analiza belek żelbetowych poddanych działaniu obciążeń impulsowych*, cz. I — *Dyskretyzacja problemu dynamiki belki żelbetowej*, 501-517; cz. II — *Analiza numeryczna i porównanie z wynikami eksperymentalnymi*, 519-539, Rozprawy Inżynierskie, vol. 36, nr 3, 1988.
- [3] BĄK G., STOLARSKI A., *Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo*, Studia z Zakresu Inżynierii, 30, Warszawa, 1990.
- [4] BUCKOHOUSE E.R., *External flexural reinforcement of existing reinforced concrete beams using boted steel channels*, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 1997.
- [5] COMBESCURE CH., DUMONTET H., VOLDOIRE F., *Homogenised constitutive model coupling damage and debonding for reinforced concrete structures under cyclic solicitations*, International Journal of Solids and Structures, 50, 2013, 3861-3874.
- [6] EMRICH F., HERTER J. I PUFFER G., *Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams under Impact Load in Comparison with Experimental Results*, Computers and Structures, BÄM, Berlin (West), vol. 4, no. 2, 1982, 455-471.
- [7] GODYCKI-ĆWIRKO T., *Mechanika betonu*, Arkady, Warszawa, 1982.
- [8] KELLIHER D., SUTTON-SWABY K., *Stochastic representation of blast load damage in a reinforced concrete building*, Structural Safety, 34, 2011, 407-417.
- [9] LUBLINER J., OLIVER J., OLLER S., ONATE E., *A plastic-damage model for concrete*, International Journal Solids and Structures, vol. 25(3), 1989, 299-326.
- [10] LUCCIONI B.M., AMBROSINI R.D., DANESI R.F., *Analysis of building collapse under blast loads*, Engineering Structures, 26, 2004, 63-71.
- [11] ŁYDŻBA D., *Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał*, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, nr 74, nr 23, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2002.
- [12] SMARZEWSKI P., *Modelowanie statycznego zachowania niesprężystych belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości*, Politechnika Lubelska, Lublin, 2011.
- [13] STOLARSKI A., *Model dynamicznego odkształcania betonu*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 37, 3-4, 1991, 405-447.
- [14] STOLARSKI A., *Dynamic strength criterion for concrete*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 130, 12, 2004, 1428-1435.
- [15] STOLARSKI A., CICHORSKI W., *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetowych*, Studia z Zakresu Inżynierii, 51, Warszawa, 2002.

- [16] STRZELECKI T., AURIAULT J.L., BAUER J., KOSTECKI ST., PUŁA W., *Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teoria homogenizacji*, [red.] T. Strzelecki, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 1996.
- [17] SIWIŃSKI J., *Modelowanie mechanizmu zniszczenia budynków obciążonych wybuchowo*, rozprawa doktorska, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2014.
- [18] URBAŃSKI A., *FE analysis of a reinforced concrete beam cross-section under shear, torsion, bending and axial force*, AMCM 7TH International Conference "Analytical Models and New Concepts in Concrete and Masonry Structures", Kraków, Polska, June 13-15 2011, 349-350.
- [19] URBAŃSKI A., *The unified finite element formulation of homogenization of structural members with periodic microstructure*, Monografia, s. 320, 183, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2005.

J. SIWIŃSKI, A. STOLARSKI

Analysis of statics and dynamics of reinforced concrete beams using hypothetical model of substitute material

Abstract. This paper contains the numerical analysis for reinforced concrete beam modelled with using a hypothetical model of the homogeneous substitute material. The static-strain-strength parameters of the substitute material for considered reinforced concrete beams were determined. Numerical static and dynamic analysis is presented in this work. Solution of the numerical static analysis was compared with the experimental Buckhouse's (1997) results and other numerical results taken from literature. Solution of the numerical dynamic analysis was compared with experimental Emrich's, Herter's and Puffer's (1982) results and other numerical results. The constant dynamic strength coefficient for hypothetical substitute material was taken into account in the dynamic analyzes.

Keywords: civil engineering, building structures, numerical analysis, reinforced concrete beams, beams from a homogeneous substitute material, statics, dynamics

DOI: 10.5604/12345865.1223089