

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWO-CALKOWEGO NIECALKOWITYCH RZĘDÓW W MATEMATYCZNYM MODELOWANIU PRZETWORNIKA CIŚNIENIA

Dynamiczny rozwój badań w ostatnich latach nad zastosowaniem rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów do analizy układów dynamicznych, skłonił autorów artykułu do podjęcia próby jego zastosowania w analizie i modelowaniu przetworników stosowanych w układach pneumatycznych. Przetworniki pneumatyczne znajdują szerokie zastosowanie w pojazdach autobusach, np. w układach hamulcowych.

W artykule przedstawiono model matematyczny przetwornika pneumatycznego, pobudzonego stałym wymuszeniem, opisany rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitego rzędu oraz jego analizę czasową za pomocą charakterystyk skokowych, wykonanych za pomocą oprogramowania MATLAB.

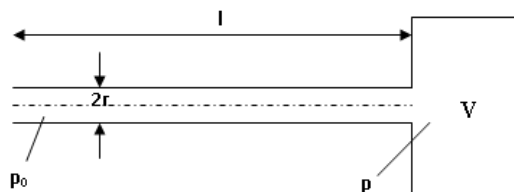
WSTĘP

W ostatnich dziesięcioleciach nastąpił dynamiczny rozwój badań nad zastosowaniem rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów w analizie układów dynamicznych. Jest on szczególnie przydatny w budowaniu dynamicznych modeli matematycznych układów pracujących w ekstremalnych warunkach lub wartościach parametrów [4], [6].

W Zakładzie Automatyki i Inżynierii Pomiarowej, na Wydziale Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno – Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, autorzy artykułu zajmują się zastosowaniem rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów w miernictwie dynamicznym. Między innymi podjęto próbę zastosowania tego narzędzia matematycznego do modelowania przetworników i układów pneumatycznych [5].

1. WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNE MEMBRANOWEGO PRZETWORNIKA CIŚNIENIA

Mechaniczny przetwornik na ogół charakteryzują trzy wielkości: masa, sztywność elementów sprężystych oraz tłumienie. Analiza właściwości dynamicznych przetwornika ciśnienia jest dość skomplikowana z uwagi na wpływ własności akustycznych układu pomiarowego zawierającego medium ciśnieniowe w przewodzie dolotowym (rurce) i komorze przetwornika. Dla określenia wpływu podłączenia rurki dolotowej do komory przetwornika na jego właściwości dynamiczne rozpatrzmy układ przedstawiony schematycznie na rysunku 1.



Rys. 1. Komora ciśnieniowa z rurką dolotową: r, l – wymiary rurki, p_0 – ciśnienie wejściowe, p – ciśnienie w komorze przetwornika (opracowanie własne)

Jeżeli objętość V jest dużo mniejsza od objętości rurki dolotowej, wówczas rurka otwarta na jednym końcu i zamknięta na drugim przez membranę przetwornika stanowi akustyczny układ drgający wzbudzany przy częstotliwości [8]:

$$f_0 = \frac{c(1+2n)}{4l} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

gdzie:

c (m/s) – prędkość dźwięku w gazie wypełniającym układ,
 l (m) – długość rurki.

Dla niskich ciśnień o małych częstotliwościach, tj. przy: (Hz), parametry rurki można uznać za skupione.

Przedstawiony na rysunku 1 układ dynamiczny zawiera element magazynujący energię potencjalną (ściśliwość gazu), element magazynujący energię kinetyczną (bezwładność gazu) oraz element powodujący stratę energii (opór przepływu gazu). Do przeprowadzenia analizy dynamicznej układu można zastosować opis za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju.

Równania Lagrange'a mają postać [9]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_n} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_n} + \frac{\partial E_p}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_n} = F_n \quad (2)$$

gdzie:

x_n – współrzędna uogólniona (odpowiednio: x i α - w układach mechanicznych, q - w układach elektrycznych, V - w układach pneumatycznych i hydraulicznych);

\dot{x}_n - pochodna zmiennej x_n względem czasu;

F_n – pobudzenie związane ze współrzędną uogólnioną x_n ;

E_p – energia potencjalna;

E_k – energia kinetyczna;

P – moc strat.

Zakładając zerowe warunki początkowe układ z rysunku 1 można opisać matematycznie równaniami:

$$E_p = \frac{C_p p^2}{2} = \frac{V^2}{2C_p}$$

$$E_k = \frac{J_p \dot{i}_p^2}{2} = \frac{L_p \dot{V}^2}{2}$$

$$P = R_p \dot{i}_p^2 = R_p \dot{V}^2$$

gdzie:

E_p – energia potencjalna;

E_k – energia kinetyczna;

P – moc strat;

C_p – pojemność pneumatyczna (ściśliwość gazów);

p – ciśnienie w komorze przetwornika;

V – objętość komory przetwornika;

J_p – moment bezwładności;

\dot{i}_p – natężenie przepływu;

L_p – indukcyjność pneumatyczna (bezwładność gazów);

R_p – opór przepływu.

Równania Lagrange'a przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{V}} \right) = L_p \ddot{V}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial V} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial V} = \frac{V}{C_p}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{V}} = 2R_p \dot{V}$$

Z powyższych zależności (4) otrzymamy:

$$L_p \frac{d^2 V}{dt^2} + R_p \frac{dV}{dt} + \frac{V}{C_p} = p_0(t) \quad (5)$$

gdzie:

$$V(t) = C_p p(t) \quad (6)$$

Z równań (5) i (6) wynika zależność wiążąca sygnał wyjściowy $p(t)$ (ciśnienie wewnątrz komory) z sygnałem $p_0(t)$ (ciśnienie na otwartym końcu):

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \frac{R_p}{L_p} \frac{dp(t)}{dt} + \frac{1}{L_p C_p} p(t) = \frac{1}{L_p C_p} p_0(t) \quad (7)$$

gdzie: $p(t)$ - ciśnienie wewnątrz komory;

$p_0(t)$ - ciśnienie na otwartym końcu.

W równaniu (7) występujące stałe można przedstawić w postaci [3]:

$$C_p = \frac{V}{\rho c^2} \quad (\text{Ns}^2 \text{m}^{-5})$$

$$L_p = \frac{4l\rho}{3\pi r^2} \quad (\text{m}^5 \text{N}^{-1}) \quad (8)$$

$$R_p = \frac{8\eta l}{\pi r^2} \quad (\text{Nsm}^{-5})$$

przy czym:

ρ (kgm^{-3}) – gęstość gazu,

η ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$) – lepkość dynamiczna

Definiując pulsację drgań własnych ω_0 oraz stopień tłumienia ξ jako:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}} = \sqrt{\frac{3\pi r^2 c^2}{4lV}} \quad (9)$$

$$\xi = \frac{R_p C_p \omega_0}{2} = 2 \frac{\eta \sqrt{\frac{3lV}{\pi}}}{r\rho c} = 2 \sqrt{\frac{3\eta^2 lV}{\pi r^2 \rho^2 c^2}}$$

gdzie:

c [ms^{-1}] – prędkość dźwięku w gazie wypełniającym układ

Równanie (2) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dp(t)}{dt} + \omega_0^2 p(t) = \omega_0^2 p_0(t) \quad (10)$$

Równanie (10) stanowi model matematyczny analizowanego układu pneumatycznego, przy zastosowaniu klasycznego rachunku różniczkowo – całkowego (równaniami różniczkowymi zwyczajnymi).

Odpowiedź impulsowa analizowanego układu pneumatycznego podaje zależność [10]:

$$g(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t \quad (11)$$

Odpowiedź skokowa badanego układu zdefiniowana jest zależnością [10]:

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\omega_0 \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \quad (11)$$

Przy czym:

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad (12)$$

2. ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWO-CAŁKOWEGO NIECAŁKOWITEGO RZĘDU DO MODELOWANIA PRZETWORNIKA CIŚNIENIA

Uwzględniając fakt, że pochodne całkowitych rzędów w rachunku różniczkowo – całkowym są szczególnym przypadkiem pochodnych niecałkowitych można zapisać:

$${}^{RL}D_t^{2\nu} p(t) + 2\xi\omega_0 {}^{RL}D_t^\nu p(t) + \omega_0^2 p(t) = \omega_0^2 p_0(t) \quad (13)$$

gdzie:

${}^{RL}D$ - pochodno-całka Riemanna-Liouville'a;

D - wspólny operator dla różniczkowania i całkowania;

$\nu > 0$.

Do wyznaczenia pochodnej funkcji ciągłej, jaką jest ciśnienie w komorze przetwornika zastosowano definicję Riemanna – Liouville'a pochodno – całki niecałkowitego rzędu [6]:

$${}^R L D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

gdzie:

α – rząd całkowania w granicach (a, t) funkcji $f(t)$,

$k-1 \leq \alpha \leq k$ oraz: $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ – funkcja gamma Eulera

Przekształcenie Laplace'a dla pochodnej niecałkowitego rzędu zdefiniowanej według Riemanna – Liouville'a przyjmuje postać [1]:

$$L[{}^{R-L} D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^k {}^{R-L} D_t^{\alpha-k-1} f(0) \quad (15)$$

gdzie: $j-1 \leq \alpha \leq j \in \mathbb{N}$

Praktyczne zastosowanie wzoru określającego przekształcenie Laplace'a pochodnej niecałkowitego rzędu zdefiniowanej według Riemanna – Liouville'a napotyka na pewne trudności związane z brakiem fizycznej interpretacji wartości początkowych kolejnych pochodnych ułamkowych rzędów. Zakładając zerowe warunki początkowe trudności związane z ich interpretacją fizyczną zostaną wyeliminowane.

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (13), dla zerowych warunków początkowych otrzymuje się:

$$s^{2\nu} p(s) + 2\xi\omega_0 s^\nu p(s) + \omega_0^2 p(s) = \omega_0^2 p_0(s) \quad (16)$$

Skąd otrzymuje się transmitancję operatorową niecałkowitego rzędu analizowanego układu pneumatycznego:

$$G^{(\nu)}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu + \omega_0^2} \quad (17)$$

Mianownik transmitancji operatorowej niecałkowitego rzędu ma dwa pierwiastki zespolone, ponieważ tłumienie układu $\xi < 1$.

Odpowiedź impulsowa analizowanego układu definiuje zależność:

$$g^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu + \omega_0^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu}} \right\} \quad (18)$$

Wykorzystując własności szeregu geometrycznego otrzymuje się:

$$g^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k}{(s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu)^k} \right\} \quad (19)$$

Dokonując elementarnych przekształceń, odpowiedź impulsowa analizowanego układu pneumatycznego przyjmuje postać:

$$g^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega_0^2)^k \frac{\omega_0^2}{[s^\nu (s^{2\nu-\nu} + 2\xi\omega_0)]^{k+1}} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k}{k!} \frac{k! \omega_0^2 s^{\nu-(2\nu+\nu k)}}{[s^\nu - (-2\xi\omega_0)]^{k+1}} \right\} \quad (20)$$

Uwzględniając [7]:

$$\int_0^\infty t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad (21)$$

w której $E_{\alpha, \beta}^{(k)}$ jest funkcją Mittag-Lefflera zdefiniowaną zależnością [7]:

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)! z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \alpha k + \beta)} \quad (22)$$

otrzymuje się zależność opisującą odpowiedź impulsową analizowanego przetwornika:

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k}{k!} \omega_0^2 t^{2\nu k + 2\nu - 1} E_{\nu, 2\nu + \nu k}^k(-2\xi\omega_0 t^\nu) \quad (23)$$

Odpowiedź skokową analizowanego układu definiuje zależność:

$$h^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2}{s(s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu + \omega_0^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2 s^{-1}}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu}} \right\} \quad (24)$$

Wykorzystując własności szeregu geometrycznego otrzymuje się:

$$h^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_0^2 s^{-1}}{s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k}{(s^{2\nu} + 2\xi\omega_0 s^\nu)^k} \right\} \quad (25)$$

Dokonując elementarnych przekształceń, odpowiedź impulsowa analizowanego układu pneumatycznego przyjmuje postać:

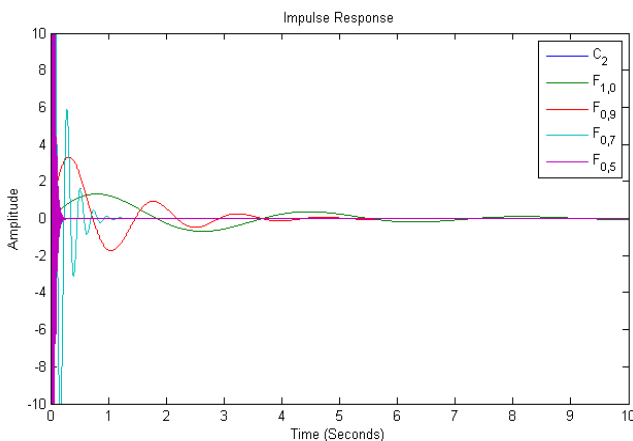
$$h^{(\nu)}(t) = L^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-\omega_0^2)^k \frac{\omega_0^2 s^{-1}}{[s^\nu (s^{2\nu-\nu} + 2\xi\omega_0)]^{k+1}} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k}{k!} \frac{k! \omega_0^2 s^{\nu-(2\nu+\nu k+1)}}{[s^\nu - (-2\xi\omega_0)]^{k+1}} \right\} \quad (26)$$

Uwzględniając zależność (21), otrzymuje się zależność opisującą odpowiedź skokową analizowanego przetwornika:

$$h^{(\nu)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0^2)^k \omega_0^2}{k!} t^{2\nu k + 2\nu} E_{\nu, 2\nu + k + 1}^k (-2\xi\omega_0 t^\nu) \quad (27)$$

3. ANALIZA NUMERYCZNA PRZETWORNIKA CIŚNIENIA

Przeprowadzenie wizualizacji ciśnienia w komorze przetwornika wymagało napisania programu w środowisku MATLAB. Program dla podanych parametrów oraz rzędów pochodnych wylicza wartości funkcji i wykreśla jej charakterystyki czasowe. Na wykreślonych charakterystykach przedstawiono, dla porównania, przebieg funkcji uzyskany dla klasycznego rozwiązania ($\nu=1$) oraz przebiegi dla kilku rzędów.

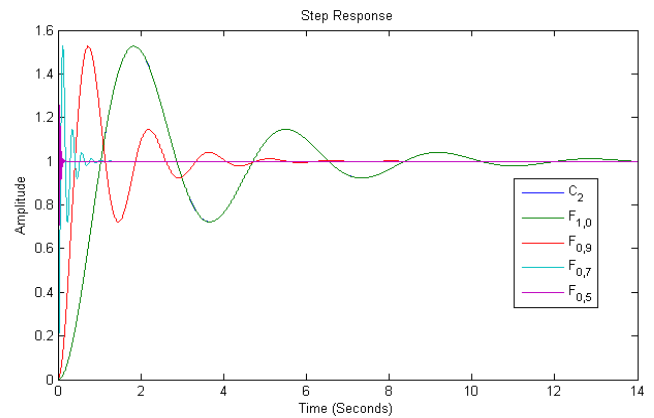


Rys. 2. Odpowiedź impulsowa układu pneumatycznego opisanego całkowitym i niecałkowitym rzędem: $F_{0,5}$ – dla $\nu = 0,5$, $F_{0,7}$ – dla $\nu = 0,7$, $F_{0,9}$ – dla $\nu = 0,9$, $F_{1,0}$ – dla $\nu = 1$, C_2 – model klasyczny (całkowity rząd) [opracowanie własne]

Na rysunku 2 wyznaczono odpowiedź impulsową analizowanego układu pneumatycznego symulując równanie (20) dla wybranych wartości parametru ν . Przedstawiono również charakterystykę impulsową (charakterystyka C_2 na powyższym rysunku), dokonując symulacji komputerowej równania (11) stanowiącego model matematyczny analizowanego układu pneumatycznego, przy zastosowaniu klasycznego rachunku różniczkowo – całkowego (opis równaniem różniczkowym zwyczajnym).

W celu wykreślenia charakterystyki skokowej analizowanego układu pneumatycznego wykorzystano oprogramowanie w środowisku MATLAB.

Przeprowadzając symulację przetwornika pneumatycznego zadano sygnał w postaci skoku jednostkowego i otrzymano odpowiedź skokową przedstawioną na rysunku 3.



Rys. 3. Odpowiedź skokowa układu pneumatycznego opisanego całkowitym i niecałkowitym rzędem: $F_{0,5}$ – dla $\nu = 0,5$, $F_{0,7}$ – dla $\nu = 0,7$, $F_{0,9}$ – dla $\nu = 0,9$, $F_{1,0}$ – dla $\nu = 1$, C_2 – model klasyczny (całkowity rząd) [opracowanie własne]

Model opisany równaniem (20) oraz (24) prawidłowo odtwarza, co do wartości amplitudy sygnału wejściowego tak jak model klasyczny (całkowitego rzędu) – przebiegi pokrywają się (przebieg $F_{1,0}$ – parametr $\nu = 1$ pokrywa się z przebiegiem C_2 – model klasyczny). Wynika z tego, że rachunek różniczkowo – całkowy całkowitych rzędów jest przypadkiem szczególnym rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów.

WNIOSKI

W celu wyznaczenia modelu matematycznego układu pneumatycznego za pomocą zwyczajnego równania różniczkowego posłużono się równaniami Lagrange'a II rodzaju. Ciśnienie wewnątrz komory przetwornika opisane zostało przy zastosowaniu równania różniczkowego niecałkowitego rzędu, które wyprowadzono dzięki zdefiniowanej przez Riemanna – Liouville'a pochodno – całki niecałkowitego rzędu.

Na rysunku 2 pokazane zostały odpowiedzi impulsowe określone wzorem (11) oraz (20) dla wybranych wartości ν z przedziału $[0,1]$. Charakterystyki impulsowe badanego układu pneumatycznego opisane za pomocą równań różniczkowo – całkowych całkowitych oraz niecałkowitych rzędów dla parametru $\nu = 1$ w podanej skali pokrywają się.

Na rysunku 3 przedstawiono charakterystyki skokowe analizowanego układu pneumatycznego określone zależnościami (12) oraz (24). Tak jak w przypadku symulacji charakterystyk impulsowych analizowanego układu pneumatycznego, charakterystyki skokowe dla parametru $\nu = 1$ w podanej skali pokrywają się. Świadczy to o prawidłowości analizowanego modelu przetwornika.

Z rysunku wynika, że dla rosnących wartości rzędów analizowanego układu pneumatycznego, odpowiedzi jednostkowe nabierają charakteru elementu inercyjnego II rzędu. Dla małych, dążących do jednego rzędów, odpowiedzi nabierają charakteru elementu inercyjnego I rzędu.

BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M., Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu. Pomiary Automatyka Robotyka nr 2/2010

2. Chwaleba A., Luft M., Właściwości i projektowanie wybranych przetworników mechano-elektrycznych. Zakład Poligraficzny Politechniki Radomskiej, Wyd. II popr. i uzupeł., ISBN 83-88001-00-0, Radom 1998
3. Hermann K., Neubert P., Instrument transducers. An introduction to their performance and design. Clarendon press, Oxford 1975
4. Kaczorek T., Selected Problems of Fractional Systems Theory. Springer-Verlag GmbH, 344 pages, ISBN 978-3-642-20501-9, Berlin, Germany 2011
5. Nowocień A., Luft M., Pietruszczak D., Zastosowanie rachunku różniczkowo – całkowego niecałkowitych rzędów w nauce i technice. Logistyka nr 3/2014
6. Ostalczyk P., Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź 2008
7. Podlubny I.: Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Academic Press, 368 pages, ISBN 0125588402, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, (1999)
8. Chwaleba A., Luft M.: Właściwości i projektowanie wybranych przetworników mechano – elektrycznych, Zakład Poligraficzny Politechniki Radomskiej, Wyd. II popr. i uzupeł., ISBN 83-88001-00-0, Radom (1998)
9. Chłędowski M.: Wykłady z automatyki dla mechaników. Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2003
10. Luft M., Łukasik Z.: Podstawy Teorii Sterowania, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Wyd. V popr. i uzupeł. ISBN 83-7351-232-2, Radom (2012)

Applications of fractional calculus in modelling of the transducers used in pneumatics

Dynamic development of recent research into the use of fractional calculus for the dynamic system analysis encouraged the authors of this paper to attempt the use of it for the analysis and modelling of transducers used in pneumatics. The paper presents a mathematical model of pneumatic transducer described the fractional calculus. The results of time analysis of transducer have shown. Tests are executed in the MATLAB programme.

Autorzy:

Prof. Mirosław Luft – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: m.luft@uthrad.pl

Prof. Elżbieta Szychta – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: e.szychta@uthrad.pl

Mgr inż. Artur Nowocień – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: arturnowocien@elektronik.edu.pl

Dr inż. Daniel Pietruszczak – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: d.pietruszczak@uthrad.pl