

Aleksander SULKOWSKI

e-mail: aleksander.sulkowski@pwr.wroc.pl

Instytut Inżynierii Lotniczej, Procesowej i Maszyn Energetycznych, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Politechnika Wrocławska, Wrocław

Miara geometrycznego odchylenia powierzchni cząstki ciała stałego od jej powłoki wypukłej

Uwagi wstępne

Do najistotniejszych parametrów opisu struktury złoża materiału ziarnistego zaliczyć należy kształt i rozmiar tworzących je cząstek ciała stałego [Koch, 1984; Sztaba, 1964; 2006]. Znajomość tych wielkości warunkuje możliwość dokładnego badania przebiegu procesów, w których dany materiał jest stosowany, co z kolei daje podstawę do tworzenia optymalnych algorytmów kontroli ich przebiegu. Można podać wiele przykładów potwierdzających tezę, iż niewielkie zmiany w zakresie rozmiaru czy kształtu wykorzystywanych w danej technologii cząstek powodują bardzo istotne zmiany własności fizykochemicznych otrzymywanych produktów [Wanibe i Itoh, 1998].

Opis kształtu i rozmiaru cząstek jest zagadnieniem posiadającym oczywiste rozwiązanie dla ziaren kulistych. W przypadku cząstek odbiegających kształtem od kuli zagadnienie to staje się skomplikowane i pomimo intensywnie prowadzonych w tej dziedzinie badań [Wanibe i Itoh T., 1998] nie ma w tym zakresie rozwiązań uniwersalnych.

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania matematycznych oraz algorytmicznych podstaw metody oceny geometrycznej rozbieżności pomiędzy projekcyjnym obrazem cząstki ciała stałego a jego powłoką wypukłą. U podstaw prowadzonych rozważań leży założenie, zgodnie z którym kształt cząstki trójwymiarowej może być scharakteryzowany w oparciu o wyniki analizy cech geometrycznych odpowiedniej serii obrazów projekcyjnych badanego obiektu.

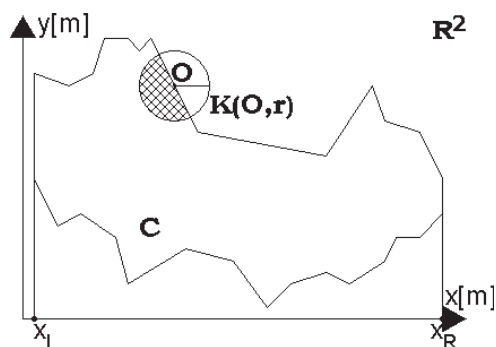
Geometryczna reprezentacja cząstki

Metodologiczna poprawność matematycznego modelowania kształtu cząstki ciała stałego uwarunkowana jest koniecznością formalnego zdefiniowania obiektu badań. Pod pojęciem cząstki rozumiany będzie pewien obiekt materialny, którego geometrycznym modelem jest ustalony podzbiór C trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej R^3 , ($C \subset R^3$) posiadający następujące właściwości:

1. C jest zbiorem zwartym i spójnym [Rudin, 1973]
2. Wnętrze zbioru C , oznaczane symbolem $Int(C)$, jest niepustym zbiorem jednospójnym [Rudin, 1973]
3. W każdym otoczeniu dowolnego punktu O zbioru C znajdują się punkty wewnętrzne tego zbioru, co zapisuje się formalnie

$$(\forall O \in C), (\forall \varepsilon > 0) (K(O, \varepsilon) \cap Int(C) \neq \emptyset) \quad (1)$$

W powyższym warunku symbol $K(O, \varepsilon)$ oznacza kulę o ośrodku w punkcie O i promieniu ε . Geometryczny model projekcyjnego obrazu cząstki symbolicznie przedstawiony jest na rys. 1.

Rys. 1. Geometryczny model projekcyjnego obrazu cząstki C

Reasumując stwierdzić można, że cząstka ciała stałego reprezentowana jest przez zwarty zbiór ($C \subset R^3$), który jest domknięciem swojego wnętrza [Rudin, 1973].

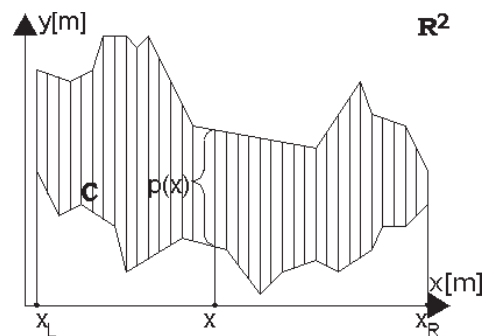
Jak wspomniano wcześniej celem niniejszej pracy jest stworzenie metody oceny geometrycznej rozbieżności pomiędzy cząstką a jej powłoką wypukłą. Pod pojęciem powłoki wypukłej zbioru C , oznaczanej symbolem $Conv(C)$, rozumiemy najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór C . Oznacza to, że powłoka wypukła, nazywana również uwypukleniem zbioru C , jest iloczynem mnogościowym wszystkich zbiorów wypukłych zawierających zbiór C . Tak więc

$$Conv(C) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda, \quad C_\lambda \supset C, \quad C_\lambda \in R^3 \quad (2)$$

W powyższym warunku symbol C_λ oznacza dowolny zbiór wypukły zawierający zbiór C . W dalszych rozważaniach cząstka reprezentowana będzie przez swój obraz projekcyjny będący jej rzutem ortogonalnym na ustaloną płaszczyznę obserwacji [Serra, 1983]. Zarówno cząstka jak i jej obraz projekcyjny oznaczany będzie tym samym symbolem C .

Unormowana funkcja przekroju poprzecznego

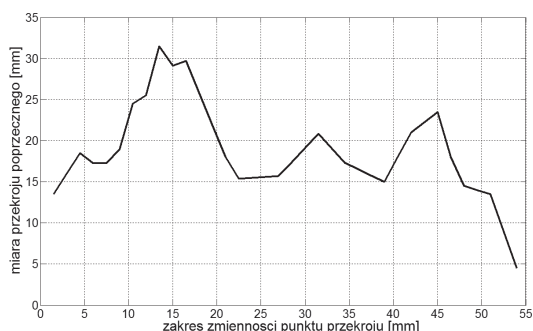
Jedną z podstawowych funkcji wykorzystywanych dla opisu geometrii konturu dwuwymiarowego zbioru zwanego jest funkcja przekroju poprzecznego [Stoyan i Stoyan, 1995]. Rozważany będzie pewien dwuwymiarowy zbiór C w kartezjańskim układzie współrzędnych przedstawiony na rys. 2.

Rys. 2. Konstrukcja funkcji przekroju poprzecznego zbioru C

Niech x_L oraz x_R oznaczają odpowiednio lewy i prawy koniec odcinka będącego rzutem prostopadłym zbioru C na oś "ox". Niech "x" będzie dowolnym punktem wewnętrznym rozważanego odcinka $[x_L, x_R]$, ($x \in (x_L, x_R)$). Symbolem $p(x)$ oznaczana będzie długość części wspólnej projekcyjnego obrazu cząstki C oraz prostej prostopadłej, w płaszczyźnie "xoy", do poziomej osi układu współrzędnych, wystawionej w punkcie x . Tak zdefiniowana funkcja

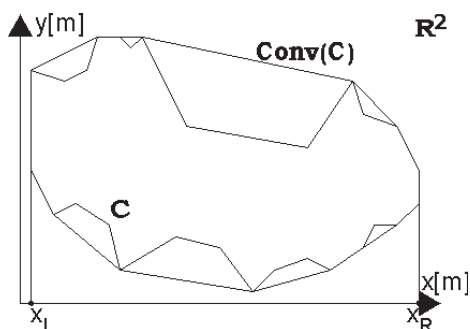
$$p: [x_L, x_R] \rightarrow R^+ \quad (3)$$

jest wspomnianą funkcją przekroju poprzecznego dwuwymiarowego zbioru C ograniczonego konturem zamkniętym. W rozważanym przypadku każdy przekrój poprzeczny zbioru C jest odcinkiem. Jak łatwo zauważyć, w przypadku ogólnym warunek ten nie musi być spełniony. Część wspólna rozważanej prostej i obrazu projekcyjnego C nie musi być zbiorem spójnym i może składać się z wielu rozłącznych części. Fakt ten nie ma jednakże wpływu na postać definicji funkcji $p(x)$. Rys. 3 ilustruje kształt wykresu funkcji przekroju poprzecznego dla zbioru C przedstawionego na rys. 2.



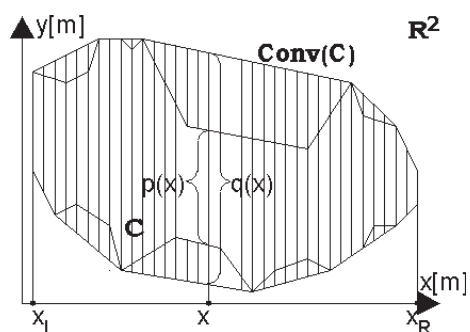
Rys.3. Funkcja przekroju poprzecznego zbioru C

Podobną konstrukcję stworzyć można dla zbioru $Conv(C)$ będącego uwypukleniem rozważanego obrazu projekcyjnego. Zbiór ten, nazywany również powłoką wypukłą zbioru C, jest przedstawiony na rys. 4.



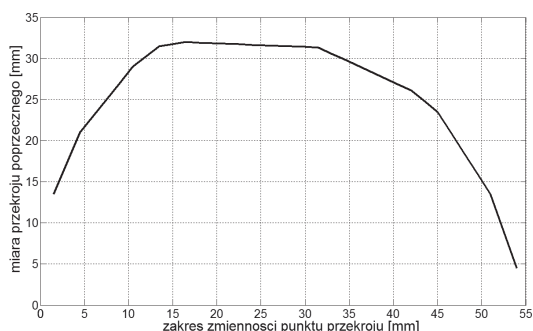
Rys. 4. Powłoka wypukła projekcyjnego obrazu zbioru C

Można wykazać, że rzut ortogonalny powłoki wypukłej $Conv(C)$ na oś Ox pokrywa się z rzutem obrazu zbioru C i jest nim odcinek $[x_L, x_R]$. Dla dowolnego punktu x leżącego wewnątrz rozważanego odcinka, w sposób analogiczny do przypadku konstrukcji funkcji $p(x)$, zdefiniowano funkcję przekroju poprzecznego powłoki wypukłej $Conv(C)$, którą oznaczono symbolem $q(x)$. Serię przekroi poprzecznych, stanowiącą podstawę konstrukcji funkcji $q(x)$, w uproszczony sposób przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Konstrukcja funkcji przekroju poprzecznego powłoki wypukłej zbioru C

Wykres zdefiniowanej w ten sposób funkcji dla rozważanej powłoki wypukłej $Conv(C)$ znajduje się na rys. 6.



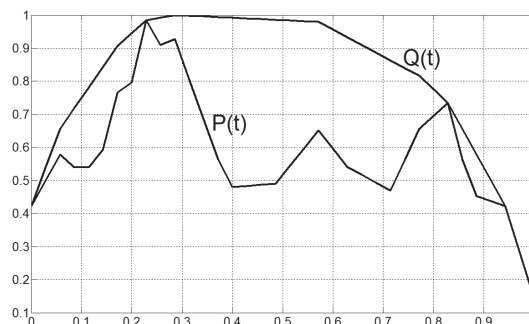
Rys. 6. Funkcja przekroju poprzecznego powłoki wypukłej zbioru C

Nie wymaga uzasadnienia fakt, iż zarówno zakres dziedziny jak i zbiór wartości zdefiniowanych funkcji przekroju poprzecznego $p(x)$ oraz $q(x)$ w oczywisty sposób zależą od rozmiarów badanego obiektu i ulegają zmianie wraz ze zmianą skali analizowanego obrazu projekcyjnego. Biorąc pod uwagę fakt, iż wszelkie charakterystyki kształtu powinny być niewrażliwe na zmianę położenia jak również zmianę skali odwzorowania rozważanego obiektu, należy dojść do wniosku, że zdefiniowane funkcje nie mogą być bezpośrednio wykorzystane do oceny kształtu obrazu zbioru C. Problem ten może być rozwiązany przy wykorzystaniu odpowiedniej transformacji liniowej przedziału $[x_L, x_R]$, na którym są określone obie funkcje $p(x)$, $q(x)$, w wyniku której przedział ten zostanie przekształcony na odcinek $[0, 1]$, przy jednoczesnej normalizacji funkcji $p(x)$ oraz $q(x)$ gwarantującej, że ich wartości nie przekroczą liczby 1. Rozważaną procedurę transformacji opisują wzory definiujące dwie nowe, bezwymiarowe charakterystyki funkcyjne $P(t)$ oraz $Q(t)$ postaci

$$P(t) = \frac{p(x_L + t(x_R - x_L))}{Q_M}, \quad t \in [0, 1] \quad (4)$$

$$Q(t) = \frac{q(x_L + t(x_R - x_L))}{Q_M}, \quad t \in [0, 1] \quad (5)$$

gdzie Q_M oznacza maksymalną wartość funkcji $q(x)$ czyli funkcji przekroju poprzecznego powłoki wypukłej $Conv(C)$ na przedziale $[x_L, x_R]$. Tak więc w wyniku zastosowania proponowanej transformacji w odniesieniu do rozważanych funkcji przekroju poprzecznego $p(x)$, $q(x)$, otrzymuje się unormowane, bezwymiarowe ich formy $P(t)$ oraz $Q(t)$, których wspólny wykres przedstawiony jest na rys. 7

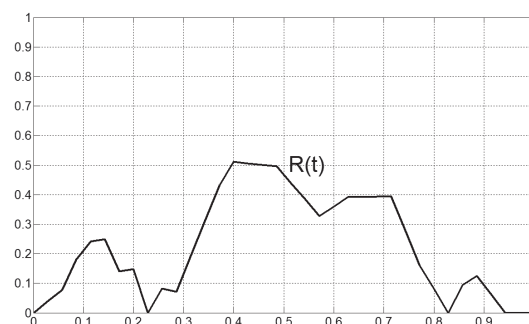


Rys. 7. Unormowane charakterystyki przekroju poprzecznego obrazu projekcyjnego zbioru C i jego powłoki wypukłej

Przedstawiona na rys. 7 konstrukcja stanowi podstawę definicji tzw. unormowanej, różnicowej charakterystyki kształtu będącej funkcyjną miarą geometrycznego odchylenia projekcyjnego obrazu cząstki C od jego powłoki wypukłej $Conv(C)$. Funkcja ta, oznaczana symbolem $R(t)$ dana jest wzorem

$$R(t) = Q(t) - P(t) \quad (6)$$

Wykres zdefiniowanej powyższym wzorem, bezwymiarowej różnicowej charakterystyki $R(t)$ dla rozważanego obrazu projekcyjnego C przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Unormowana różnicowa charakterystyka kształtu obrazu projekcyjnego C

Można wykazać [Sulkowski, 2009], że rozważana różnicowa charakterystyka kształtu $R(t)$ ma następujące właściwości:

1. $R(t)$ jest funkcją ciągłą zmiennej D , $t \in [0, 1]$
2. W każdym punkcie przedziału $[0, 1]$ spełniona jest nierówność

$$0 \leq R(t) \leq 1$$

3. Jeżeli dla pewnego argumentu $t \in [0, 1]$ spełniony jest warunek $R(t) = 0$, zachodzi wówczas oczywista równość $Q(t) = P(t)$, co w konsekwencji prowadzi do wniosku, że dla argumentu $(x \in (x_L, x_R))$ o wartości $x = x_L + t(x_R - x_L)$ przekrój poprzeczny projekcyjnego obrazu C i przekrój poprzeczny jego powłoki wypukłej pokrywają się i zachodzi równość $q(x) = p(x)$.
4. W przypadku gdy funkcja $R(t)$ w całym przedziale $t \in [0, 1]$ przyjmuje wartość równą 0, mamy prawo wnioskować, że zbiór C jest identyczny ze swoją powłoką wypukłą $Conv(C)$ i jako taki sam jest zbiorem wypukłym.

Różnicowy współczynnik kształtu

Rozważane projekcyjne charakterystyki przekroju poprzecznego $P(t)$ oraz $R(t)$ zdefiniowane wzorami (5), (6) wykorzystać można do konstrukcji współczynnika kształtu obrazu cząstki.

Różnicowym współczynnikiem kształtu projekcyjnego obrazu cząstki C , nazwano wielkość $\Phi_R(C)$ daną wzorem

$$\Phi_R(C) = \left(\int_0^1 R(t) dt \right) / \left(\int_0^1 Q(t) dt \right) \quad (7)$$

Można wykazać [Sulkowski, 2009], że rozważany współczynnik $\Phi_R(C)$ posiada następujące właściwości:

1. Wartość liczbową współczynnika $\Phi_R(C)$ podlega ograniczeniom

$$0 \leq \Phi_R(C) \leq 1$$

2. W przypadku gdy spełniona jest równość $\Phi_R(C) = 0$, zbiory C oraz $Conv(C)$ pokrywają się co oznacza, że projekcyjny obraz cząstki C jest zbiorem wypukłym.
3. Można udowodnić, że prawdziwa jest równość

$$\Phi_R(C) = \lambda(Conv(C) - C) / \lambda(Conv(C))$$

gdzie $\lambda(*)$ oznacza miarę Lebesgue'a (pole powierzchni) zbioru na płaszczyźnie [Łojasiewicz, 1973]. Powyższa zależność pozwala traktować wartość współczynnika $\Phi_R(C)$ jako miarę deficytu wypukłości projekcyjnego obrazu cząstki C .

4. Wartość współczynnika $\Phi_R(C)$ nie zależy od orientacji obrazu cząstki C w układzie współrzędnych.

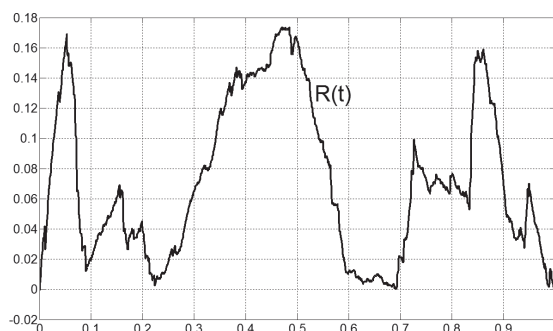
Charakterystyka kształtu cząstki rzeczywistej

Rozważmy projekcyjny obraz rzeczywistej cząstki ciała stałego widziany na tle jego powłoki wypukłej przedstawiony na rys. 9.



Rys. 9. Obrazu projekcyjnego cząstki C_1 i jego powłoka wypukła

Wykres bezwymiarowej, unormowanej różnicowej charakterystyki kształtu rozważanej cząstki przedstawiony jest na rys. 10.



Rys. 10. Unormowana różnicowa charakterystyka kształtu obrazu projekcyjnego C_1

Wartość liczbową różnicowego współczynnika kształtu dla obrazu rozważanej cząstki równa jest $\Phi_R(C) = 0,1310$.

Uwagi końcowe

Należy podkreślić, że postać funkcyjna, a co za tym idzie, postać wykresu rozważanej różnicowej charakterystyki kształtu $R(t)$ opisującej geometryczną rozbieżność pomiędzy projekcyjnym obrazem cząstki C a jego powłoką wypukłą, zależą wyraźnie od orientacji rozważanego obrazu w układzie współrzędnych podczas gdy wartość liczbową różnicowego współczynnika kształtu $\Phi_R(C)$ jest niezależna od kierunku obserwacji rozważanego obiektu.

Zauważyć można, że zaproponowane w niniejszej pracy konstrukcje mogą być wykorzystane do wprowadzenia kolejnej funkcji kształtu $S(t)$, którą można nazwać charakterystyką ilorazową i opisać definicyjnym wzorem

$$S(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \quad (8)$$

gdzie $P(t)$ oraz $Q(t)$ w dalszym ciągu oznaczają, zdefiniowane wzorami (4), (5) unormowane charakterystyki przekroju poprzecznego projekcyjnego obrazu cząstki i jego powłoki wypukłej.

Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowana funkcja podlega oczywistym ograniczeniom

$$0 \leq S(t) \leq 1 \quad (9)$$

Można wykazać, że w przypadku gdy spełniony jest warunek

$$S(t) = 1, \quad t \in [0, 1] \quad (10)$$

uzasadniony jest wniosek, że projekcyjny obraz cząstki C jest zbiorem wypukłym.

LITERATURA

- Koch R., 1984. *Procesy mechaniczne w inżynierii chemicznej*. Wyd. Pol.Wr., Wrocław
- Łojasiewicz S., 1973. *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa
- Rudin W., 1973. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill Book Company, New York
- Serra J., 1983. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Theoretical Advances*, Acad. Press
5. Stoyan D., Stoyan H., 1995, *Fractals, Random Shapes and Point Fields*, John Wiley & Sons, New York
- Sulkowski A., 2009. *Algorytmy oceny deficytu wypukłości projekcyjnego obrazu cząstki ciała stałego*, Raport SPR 23/09, (I-22/W9), Politechnika Wrocławska, Wrocław
- Sztaba K.S., 1964. *Niektóre własności geometryczne zbiorów ziarn mineralnych*. Zesz. Nauk. AGH, Rozprawy 25, Kraków
- Sztaba K.S., 2006. Relacje pomiędzy wielkościami ziarn mineralnych określonymi z przyjęciem różnych założeń definicyjnych. *Inż. Ap. Chem.*, 45, nr 4, 146-147
- Wanibe Y., Itoh T., 1998. *New Quantitative Approach to Powder Technology*, John Wiley & Sons, New York

Praca została zrealizowana w ramach projektu badawczego S 20010/122 01.