

Aleksander SULKOWSKI

e-mail: aleksander.sulkowski@pwr.wroc.pl

Instytut Inżynierii Lotniczej, Procesowej i Maszyn Energetycznych, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Politechnika Wrocławska, Wrocław

Projekcyjna charakterystyka deficytu wypukłości cząstki ciała stałego

Wstęp

Cechy geometryczne cząstek ciała stałego należą do grupy najistotniejszych parametrów opisujących strukturę materiału ziarnistego [Koch, 1984; Sztaba, 1964]. Rozmiar i kształt cząstek mogą mieć decydujący wpływ na przebieg procesu, w którym dany materiał jest wykorzystywany, w związku z czym problem właściwego ich opisu stanowi jedno z naczelnych zadań leżących u podstaw większości technologii wykorzystujących materiały rozdrobnione [Bodziony, 1965]. Konstrukcja charakterystyk struktury geometrycznej cząstek jest zagadnieniem złożonym i pomimo intensywnie prowadzonych w tej dziedzinie badań, stanowi wciąż temat otwarty [Ohser i Mücklich, 2000].

W niniejszej pracy podjęto próbę stworzenia matematycznych podstaw metody opisu kształtu cząstki przy wykorzystaniu pewnych modyfikacji elementarnych operacji morfologii matematycznej [Serra, 1983]. Przyjęte będzie założenie, że kształt cząstki może być opisany na podstawie analizy cech geometrycznych jej dwuwymiarowego obrazu projekcyjnego.

Podstawowe pojęcia geometryczne

Dla zapewnienia przejrzystości prowadzonych rozważań celowe wydaje się być przypomnienie definicji niektórych pojęć z zakresu geometrii wykorzystywanych w niniejszej pracy.

Cząstka. Pojęcie to oznaczać będzie pewien obiekt materialny, którego geometrycznym modelem jest zwarty i spójny podzbiór C przestrzeni R^3 [Rudin, 1973].

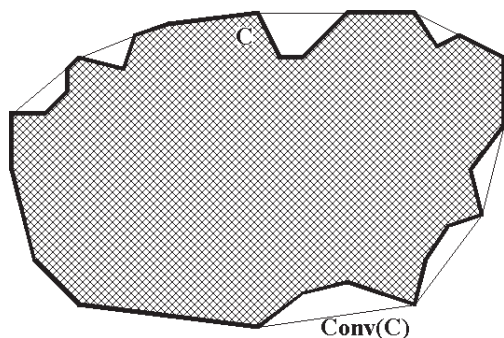
Zbiór wypukły. Zbiór C nazywany będzie wypukłym, jeżeli wraz z każdymi dwoma swoimi punktami P, Q zawiera on również łączący te punkty odcinek $[P, Q]$ [Rudin, 1973].

Powłoka wypukła. Pod pojęciem powłoki wypukłej zbioru C , oznaczonej symbolem \hat{C} lub $Conv(C)$ rozumiany będzie najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór C [Rudin, 1973].

Obraz projekcyjny. Obrazem projekcyjnym trójwymiarowego zbioru C nazywany będzie jego rzut ortogonalny na ustaloną dwuwymiarową podprzestrzeń R^2 przestrzeni R^3 [Serra, 1983].

Erozja pierścieniowa

W niniejszej pracy cząstka C reprezentowana będzie przez swój obraz projekcyjny, dla oznaczenia którego będzie stosowany symbol C – ten sam, który oznacza całą rozważaną cząstkę trójwymiarową. Przykład projekcyjnego obrazu cząstki wraz z jego powłoką wypukłą przedstawiono na rys. 1.



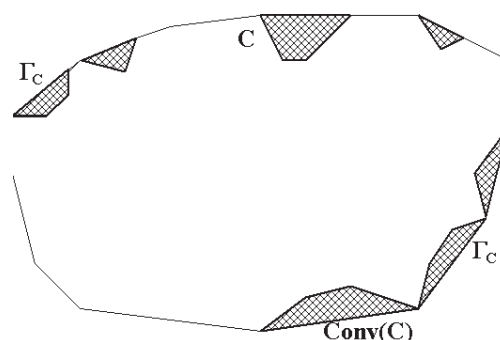
Rys. 1. Projekcyjny obraz cząstki C i jego powłoka wypukła $\hat{C} = Conv(C)$

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest stworzenie metody opisu cech geometrycznych strefy deficytu wypukłości projekcyjnego obra-

zu cząstki. Pod pojęciem strefy deficytu wypukłości, oznaczanej symbolem Γ_C , rozumiany będzie zbiór stanowiący różnicę mnogościową pomiędzy powłoką wypukłą \hat{C} a obrazem cząstki C . Tak więc strefa deficytu wypukłości Γ_C zdefiniowana jest wzorem

$$\Gamma_C = \hat{C} - C \quad (1)$$

i stanowi ona tę część przestrzeni, o którą należałoby uzupełnić obszar projekcyjnego obrazu cząstki C aby otrzymać jego powłokę wypukłą. Strefę deficytu wypukłości Γ_C rozważanego obrazu projekcyjnego cząstki C przedstawiono na rys. 2.

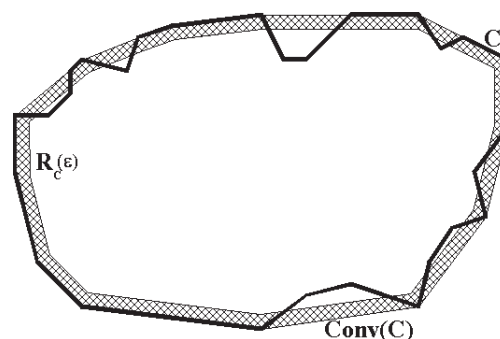


Rys. 2. Strefa deficytu wypukłości projekcyjnego obrazu cząstki

Proponowana w niniejszej pracy charakterystyka geometryczna jest funkcją opisującą ewolucję strefy deficytu wypukłości Γ_C w przypadku gdy projekcyjny obraz cząstki C podlega procesowi redukcji powierzchni przy pomocy pierścienia erozji o wzrastającej w sposób ciągły głębokości. Pod pojęciem pierścienia erozji o głębokości ε , dla oznaczenia którego stosowany będzie symbol $R_C(\varepsilon)$, rozumiany będzie zbiór stanowiący część wspólną powłoki wypukłej \hat{C} oraz sumy mnogościowej zbioru wszystkich kul o promieniu ε , których środki są punktami brzegowymi zbioru \hat{C} . Tak więc pierścień erozji $R_C(\varepsilon)$ jest zbiorem postaci

$$R_C(\varepsilon) = \hat{C} \cap \left\{ \bigcup_{x \in Fr(\hat{C})} K(x, \varepsilon) \right\} \quad (2)$$

Przykład konstrukcji pierścienia erozji przedstawiono na rys. 3.

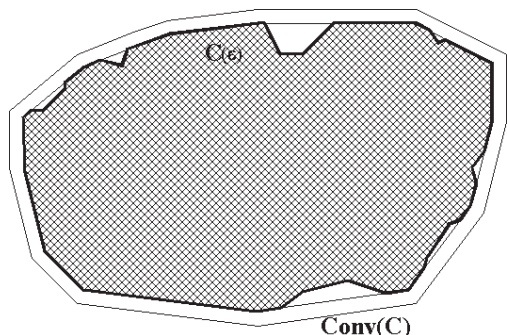


Rys. 3. Pierścień erozji projekcyjnego obrazu cząstki

Rozważana operacja redukcji obszaru obrazu cząstki C za pomocą pierścienia erozji $R_C(\varepsilon)$ zostanie nazwana erozją pierścieniową. Tak więc erozja pierścieniowa zbioru C o głębokości ε jest operacją morfologiczną prowadzącą do wyznaczenia zredukowanego obrazu cząstki, dla oznaczenia którego stosowany będzie symbol $C(\varepsilon)$, będącego różnicą mnogościową zbioru C oraz pierścienia erozji $R_C(\varepsilon)$. Tak więc

$$C(\varepsilon) = C - R_C(\varepsilon) \quad (3)$$

Efekt redukcji obszaru obrazu projekcyjnego cząstki za pomocą pierścienia erozji zilustrowany jest na rys. 4.



Rys. 4. Zredukowany obraz projekcyjny

Konsekwencją wzrostu głębokości pierścienia erozji jest stopniowy zanik obszaru projekcyjnego obrazu cząstki aż do jego całkowitej anihilacji. Najmniejszą wartością parametru ε , dla której pierścień erozji $R_C(\varepsilon)$ redukuje obraz cząstki do zbioru pustego nazywany będzie głębokością krytyczną i oznaczany symbolem ε_X . Tak więc wartość ε_X dana jest wzorem

$$\varepsilon_X = \inf\{\varepsilon > 0: R_C(\varepsilon) \supset C\} \quad (4)$$

Pierścień erozji o głębokości ε_X nazywany będzie pierścieniem krytycznym. Łatwo zauważyć, iż możliwa jest sytuacja, w której, dla pewnej wartości parametru ε , zredukowany obraz cząstki $C(\varepsilon)$ jest zbiorem wypukłym czyli zbiorem, którego strefa deficytu wypukłości jest zbiorem pustym. Najmniejszą wartość parametru ε , dla której zaobserwować można opisany efekt nazywany będzie progową głębokością pierścienia erozji. Dla jej oznaczenia stosowany będzie symbol ε_p . Tak więc wartość ε_p , o ile istnieje, dana jest wzorem

$$\varepsilon_p = \inf\{\varepsilon > 0: \{C - R_C(\varepsilon)\} = \{\hat{C} - R_C(\varepsilon)\}\} \quad (5)$$

Pomiędzy rozważanymi dwiema charakterystycznymi wartościami parametru ε zachodzi oczywista nierówność

$$\varepsilon_p \leq \varepsilon_X \quad (6)$$

Pierścień erozji o głębokości ε_p nazywany będzie pierścieniem progowym i oznaczany symbolem $R_C(\varepsilon_p)$. Obraz cząstki zredukowany pierścieniem progowym nazywany będzie jądrem wypukłym projekcyjnego obrazu cząstki C i oznaczany symbolem J_C . Zgodnie z określeniem jądro wypukłe jest więc różnicą mnogościową pomiędzy obrazem projekcyjnym cząstki C a progowym pierścieniem erozji J_C . Spełniona jest więc definicyjna równość

$$J_C = C - R_C(\varepsilon_p) \quad (7)$$

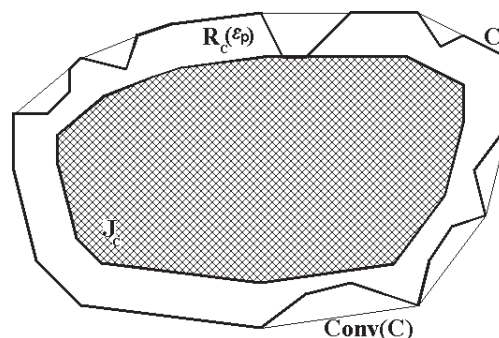
Rozmiar i położenie jądra wypukłego uależnione są od cech geometrycznych strefy deficytu wypukłości projekcyjnego obrazu cząstki. W przypadku gdy projekcyjny obraz cząstki jest zbiorem wypukłym, jego strefa deficytu wypukłości jest zbiorem pustym co prowadzi do wniosku, że parametr ε_p , oznaczający progową głębokość pierścienia erozji, przyjmuje wartość równą zeru.

W konsekwencji, w takim przypadku jądro wypukłe pokrywa się z projekcyjnym obrazem cząstki i zachodzi oczywista równość

$$J_C = C \quad (8)$$

Kształt i położenie jądra wypukłego rozważanego geometrycznego modelu projekcyjnego obrazu cząstki przedstawiono na rys. 5.

Należy podkreślić fakt, iż jądro obrazu projekcyjnego C może być w pewnych szczególnych przypadkach zbiorem pustym.



Rys. 5. Jądro wypukłe projekcyjnego obrazu cząstki

Funkcja erozji pierścieniowej

Dla opisu cech geometrycznych strefy deficytu wypukłości projekcyjnego obrazu cząstki wykorzystana zostanie funkcja erozji pierścieniowej $F_C(t)$, która wyraża stosunek pola projekcyjnego obrazu cząstki zredukowanego pierścieniem erozji o głębokości „ $t\varepsilon_X$ ” ($t \in [0, 1]$), do pola powłoki wypukłej \hat{C} , zredukowanej tym samym pierścieniem erozji. Tak więc funkcja erozji pierścieniowej dana jest wzorem:

$$F_C(t) = \frac{\lambda(C - R_C(t\varepsilon_X))}{\lambda(\hat{C} - R_C(t\varepsilon_X))}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (9)$$

gdzie $\lambda(\cdot)$ oznacza miarę Lebesgue'a (pole) [Łojasiewicz, 1973] zbioru na płaszczyźnie, natomiast parametr ε_X wyraża, zdefiniowaną wcześniej, krytyczną głębokość pierścienia erozji. Można wykazać że funkcja $F_C(t)$ posiada następujące właściwości:

1. $F_C(t): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
2. Funkcja $F_C(t)$, na mocy definicji przyjmuje oczywiście wartości nieujemne. Biorąc ponadto pod uwagę fakt, iż prawdziwa jest inkluzja $(C - R_C(t\varepsilon_X)) \subset (\hat{C} - R_C(t\varepsilon_X))$, dochodzimy do wniosku, że zachodzi nierówność $F_C(t) \leq 1$. Ostatecznie wnioskujemy więc, że spełniony jest warunek $(\forall t \in [0, 1])(0 \leq F_C(t) \leq 1)$.
3. $F_C(t)$ jest funkcją ciągłą.
4. $F_C(t)$ jest funkcją niemalejącą.
5. $F_C(0) = \frac{\lambda(C)}{\lambda(\hat{C})}$
6. $F_C(\varepsilon_p/\varepsilon_X) = 1$

Wartość funkcji $F_C(t)$ w punkcie „0” równa jest stosunkowi pola obrazu projekcyjnego cząstki C do pola jego powłoki wypukłej \hat{C}

Właściwość ta wynika wprost z definicji funkcji $F_C(t)$ i jest prostą konsekwencją równości $\lambda(C - R_C(\varepsilon_p)) = \lambda(\hat{C} - R_C(\varepsilon_p))$.

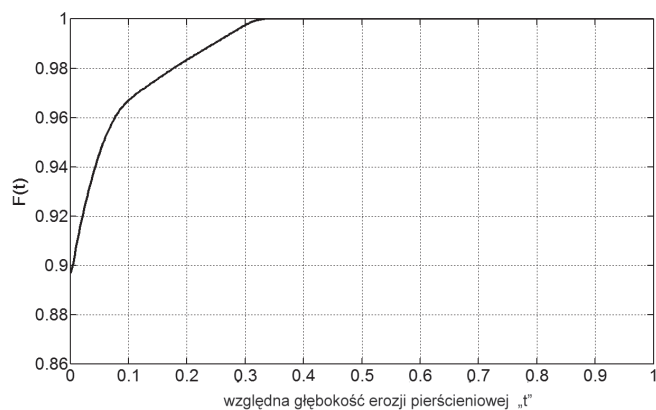
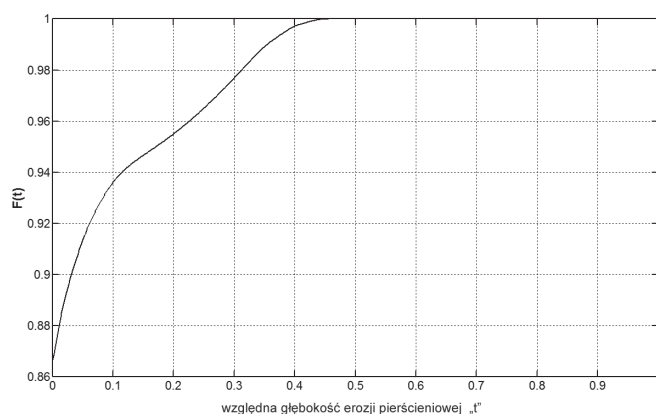
Warunek ten, który oznacza, że funkcja $F_C(t)$ osiąga swoją maksymalną wartość w punkcie $t = \varepsilon_p/\varepsilon_X$ i od tego momentu jest funkcją stałą, której wartość równa jedności, jest prostą konsekwencją warunków sformułowanych w pkt. 3 i 5.

Funkcja erozji pierścieniowej obrazu projekcyjnego cząstki rzeczywistej

Rozważane są obrazy projekcyjne dwóch rzeczywistych cząstek ciała stałego, C_1, C_2 przedstawione na rys. 6, 8. Na ilustracjach tych przedstawiono również obraz powłoki wypukłej i jądra erozyjnego każdej z rozważanych cząstek. Wykresy funkcji erozji pierścieniowej badanych obiektów są przedstawione na rys. 7, 9.

Podsumowanie

Zaproponowana w niniejszej pracy charakterystyka kształtu jaką jest funkcja erozji pierścieniowej $F_C(t)$ zdefiniowana wzorem (9), w syntetyczny sposób opisuje strukturę geometryczną strefy deficytu wypukłości F_C obrazu cząstki stanowiącej różnicę mnogościową pomiędzy po-

Rys. 6. Powłoka wypukła i jądro wypukłe obrazu projekcyjnego cząstki C_1 Rys. 7. Funkcja erozji pierścieniowej obrazu projekcyjnego cząstki C_1 Rys. 8. Powłoka wypukła i jądro wypukłe obrazu projekcyjnego cząstki C_2 Rys. 9. Funkcja erozji pierścieniowej obrazu projekcyjnego cząstki C_2

włoką wypukłą projekcyjnego obrazu cząstki a samym obrazem. Wśród istotnych cech funkcji $F_C(t)$, z których większość została scharakteryzowana w tekście pracy, na szczególną uwagę zasługuje wartość rozważanej charakterystyki funkcyjnej w punkcie $t = 0$. Wartość ta, zgodnie ze wzorem (9), równa jest

$$F_C(0) = \frac{\lambda(C)}{\lambda(\hat{C})} \quad (10)$$

gdzie, jak wcześniej wspomniano, $\lambda(C)$ oznacza miarę zbioru C na płaszczyźnie. Tak więc rozważana wartość $F_C(0)$ wyraża stosunek pola powierzchni obrazu cząstki do pola powierzchni jego powłoki wypukłej i jako taka może być traktowana jako pewien globalny współczynnik kształtu, który nazywany będzie współczynnikiem deficytu wypukłości obrazu cząstki. Dla jego oznaczenia przyjęto symbol $A(C)$. Wartość liczbową rozważanego współczynnika podlega oczywistym ograniczeniom

$$0 \leq \lambda(C) \leq 1 \quad (11)$$

i jest tym większa im mniejszy obszar zajmuje strefa deficytu wypukłości w obrazie cząstki. Istotnym elementem wykresu funkcji $F_C(t)$ jest wartość zmiennej t (o ile istnieje), dla której funkcja ta po raz pierwszy przyjmuje wartość 1. Zgodnie z punktem 5) dzieje się tak dla

$$t = \varepsilon_P / \varepsilon_X \quad (12)$$

jako, że wówczas pierścień erozji pochłania całkowicie strefę deficytu wypukłości obrazu cząstki, a pozostała jego część staje się zbiorem wypukłym. Można oczywiście podać przykłady projekcyjnych obrazów cząstek, dla których rozważane zjawisko nie występuje. W takim przypadku wartość funkcji $F_C(t)$ jest stale mniejsza od 1. Na uwagę zasługuje również przypadek

$$F_C(t) = 1 \quad (t \in [0, 1]) \quad (13)$$

W tej sytuacji należy wnioskować, że projekcyjny obraz cząstki C jest zbiorem wypukłym tożsamym ze swoją powłoką wypukłą \hat{C} .

LITERATURA

- Bodziony J., 1965. On the possibility of application of integral geometry methods in certain problems of liberation of mineral grains. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techniques*, **13**, nr 9, 459-467
- Koch R., 1984. *Procesy mechaniczne w Inżynierii Chemicznej*. Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław
- Łojasiewicz S., 1973. *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. PWN, Warszawa.
- Ohser J., Mücklich F., 2000. *Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science*. John Wiley & Sons, New York
- Rudin W., 1973. *Functional Analysis*. Mc. Graw-Hill Book Company, New York
- Serra J., 1983. *Image Analysis and Mathematical Morphology. Theoretical Advances*, Acad. Press
- Sulkowski A., 2005. *Zastosowanie konturowanych operacji morfologicznych do opisu ewolucji kształtu cząstek ciała stałego*, Raport SPR 1/05 Z. A. P, Wyd. M-E., Pol. Wrocławskiej, Wrocław
- Sztaba K.S., 1964. *Niektóre własności geometryczne zbiorów ziarn mineralnych*. Zesz. Nauk. AGH Kraków, Rozprawy 25
- Sztaba K.S., 2006. Relacje pomiędzy wielkościami ziarn mineralnych określonymi z przyjęciem różnych założeń definicyjnych. *Inż. Ap. Chem.*, **45**, nr 4, 146-147