

dr inż. Piotr Stanisław FRĄCZAK^{a,b}, dr n. tech. Andrzej Antoni CZAJKOWSKI^{c,d}

^a Zachodniopomorskie Centrum Edukacji Morskiej i Politechnicznej w Szczecinie
West Pomeranian Center for Maritime and Polytechnic Education in Szczecin

^b Zespół Szkół Elektryczno-Elektronicznych / Technikum Mechaniczno-Energetyczne w Szczecinie
Complex of Electrical and Electronic Schools / Technical School of Mechanics and Energy in Szczecin

^c Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Wydział Systemów Automotive
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Faculty of Automotive Systems

^d Wyższa Szkoła Humanistyczna Tworzystwa Wiedzy Powszechnej w Szczecinie, Wydział Nauk Stosowanych
Higher School of Humanities of Common Knowledge Society in Szczecin, Faculty of Applied Sciences

METODA RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH DLA OPISU STANU NIEUSTALONEGO OBWODU SZEREGOWEGO RLC ZAŁĄCZONEGO DO NAPIĘCIA SINUSOIDALNEGO Z UŻYCIEM PROGRAMU MATHCAD

Streszczenie

Wstęp i cel: W pracy przedstawiono opis i symulacje stanu nieustalonego w obwodzie elektrycznym szeregowym RLC. Pokazano zastosowanie metody równań różnicowych do rozwiązywania równania różniczkowego drugiego rzędu w programie MathCAD.

Material i metody: W wyniku zastosowania metody równań różnicowych wskazano na możliwość przejścia od równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Zastosowano metodę analityczno-numeryczną. W analizie numerycznej użyto program MathCAD.

Wyniki: Otrzymano jednakowy kształt przebiegu krzywej prądu nieustalonego przy wyznaczeniu metodą równań różnicowych drugiego rzędu i równaniem różniczkowo-całkowym z wykorzystaniem przekształcenia odwrotnego Laplace'a. Ponadto otrzymane kształty prądów nieustalonych w rozpatrywanym obwodzie elektrycznym zweryfikowano w programie numerycznym PSpice

Wniosek: Stosując zarówno metodę równań różnicowych i metodę przekształceń Laplace'a otrzymuje się jednakowe przebiegi prądu nieustalonego w funkcji czasu.

Słowa kluczowe: Obwody elektryczne szeregowo RLC, stany nieustalone w obwodach RLC, równania różnicowe, przekształcenie Laplace'a, symulacja numeryczna, Mathcad i PSpice.

(Otrzymano: 10.10.2018; Zrecenzowano: 15.10.2018; Zaakceptowano: 25.10.2018)

DIFFERENCE EQUATION METHOD FOR DESCRIPTION OF TRANSIENT STATE IN THE RLC CIRCUIT WITH SINUSOIDAL EXCITATION BY USING MATHCAD PROGRAM

Abstract

Introduction and aim: Some description and simulation of the transient in RLC circuit have been presented in this paper. Also has been shown the application of the Laplace transform to solve the differential equation.

Material and methods: By using the Laplace transformation to the option of the transition from linear differential equations of the second order with constant coefficients to the algebraic equations. The analytical and numerical methods have been used in the considerations. In numerical analysis, a reversed Laplace transform was applied by using the MathCAD program.

Results: It has been obtained the same curve shape of the transient current at the determination by the second-order differential equation (classical solution) and the different-integral equation by using the inverse Laplace transform. In addition, the obtained shapes of transients in the considered electrical circuit were verified in the numerical program PSpice

Conclusion: By applying both the Laplace transform method and the analytical method, the same transient currents are obtained as a function of time.

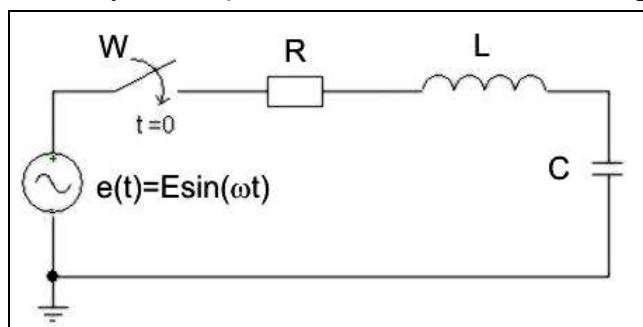
Keywords: Circuits, transient states, differential equations, Laplace transform, numerical simulation, MathCAD and PSpice programs.

(Received: 10.10.2018; Reviewed: 15.10.2018; Accepted: 25.10.2018)

1. Opis metodą różnic skończonych prądu w stanie nieustalonym obwodu szeregowego RLC

1.1. Wprowadzenie

Szeregowy obwód RLC (Rys.1) załączono w chwili czasu $t=0$ do napięcia $e(t) = E \cdot \sin(\omega \cdot t)$.



Rys.1. Schemat załączenia szeregowego obwodu RLC do napięcia sinusoidalnego

Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig.1. Scheme of switching the serial RLC circuit to sinusoidal voltage

Source: Elaboration by the Authors

Dyskretyzujemy czas $t = n \cdot \Delta t$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Oznaczamy dyskretne wartości funkcji $i(t)$ jako $I_0, I_1, I_2, \dots, I_N$. Pierwszą i drugą pochodną metody różnic skończonych oznaczamy odpowiednio [1], [2], [9], [11], [14], [21]:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) = \frac{I_{n+2} - 2I_{n+1} + I_n}{\Delta t^2}. \quad (2)$$

Opisujemy obwód szeregowy RLC (Rys. 1) równaniem różniczkowo całkowym (3) podczas załączania do napięcia sinusoidalnego w czasie $t = 0$:

$$L \cdot \frac{d}{dt}i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (3)$$

Dokonując różniczkowania lewej i prawej strony równania (3) uzyskujemy następujące równanie różniczkowe drugiego stopnia:

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2}i(t) + R \cdot \frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}i(t) = E \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (4)$$

Prawą stronę równania (4) dostosowujemy do obliczeń numerycznych. Otrzymano następującą postać prawej strony równania (4):

$$e_n = E \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_n). \quad (5)$$

Podstawiając do równania różniczkowego (4) pierwszą i drugą pochodną w postaci różnic skończonych oraz równanie (5) otrzymano równanie:

$$\frac{I_{n+2} - 2I_{n+1} + I_n}{\Delta t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t} + \frac{1}{LC} \cdot I_n = \frac{e_n}{L}. \quad (6)$$

Porządkując równanie (6) uzyskano równanie różnicowe w postaci:

$$I_{n+2} = 2 \cdot I_{n+1} - I_n - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \cdot (I_{n+1} - I_n) - \frac{\Delta t^2}{L \cdot C} \cdot I_n + \Delta t^2 \cdot \frac{e_n}{L}. \quad (7)$$

1.2. Obliczanie metodą różnic skończonych prądu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC z użyciem programu MathCAD

Obliczenia prądu w stanie nieustalonym (obwód szeregowy RLC, Rys.1) dokonano metodą równań różnicowych (1.1) w programie *MathCAD* (wzory 8-17) [6], [8], [13], [15], [17], [18].

Dane w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} E & R \\ L & C \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 100 & 4 \\ 3 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f := 60 \quad (9)$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad (10)$$

$$n := 0 .. N \quad (11)$$

$$\Delta t := 0.000002 \quad (12)$$

$$t_n := n \cdot \Delta t \quad (13)$$

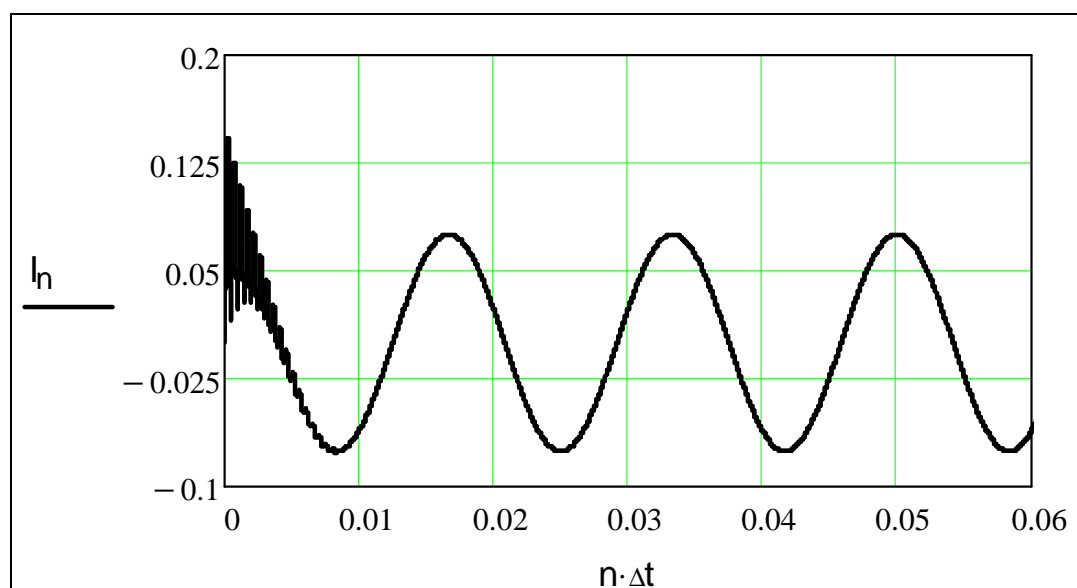
$$e_n := E \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_n) \quad (14)$$

$$I_0 := 0 \quad (15)$$

$$I_1 := I_0 + \frac{e_0}{L} \cdot \Delta t^2 \quad (16)$$

$$I_{n+2} := 2 \cdot I_{n+1} - I_n - \frac{R \cdot \Delta t}{L} \cdot (I_{n+1} - I_n) - \frac{\Delta t^2}{L \cdot C} \cdot I_n + \Delta t^2 \cdot \frac{e_n}{L} \quad (17)$$

Na rysunku 2 zamieszczono wyniki obliczeń symulacyjnych w programie *MathCAD*.



Rys. 2. Stan nieustalony w obwodzie RLC w programie *MathCAD* otrzymany metodą równań różnicowych
Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 2. The transient state in the RLC circuit in *MathCAD* obtained the method of differential equations
Source: Elaboration by the Authors

2. Weryfikacja obliczeń prądu nieustalonego w obwodzie RLC metodą różnic skończonych

2.1. Wyznaczanie prądu nieustalonego metoda transformat Laplace'a w programie MathCAD

2.1.1. Wprowadzenie

Szeregowy obwód RLC (Rys. 1) załączono w chwili $t = 0$ do napięcia $e(t) = E \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Bilans napięć jest równaniem (18) z niewiadomą funkcją $i(t)$ [1], [2], [4], [9], [11], [14], [21]:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (18)$$

Równanie (18) bilansu napięć z niewiadomą funkcją $i(t)$ w zapisie rachunku operatorowego przyjmuje następującą formę:

$$s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot I(0) + R \cdot I(s) + \frac{u(0)}{s} + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) = E \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \quad (19)$$

Z kolei równanie (18) dla zerowych warunków początkowych upraszcza się do następującej postaci:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (20)$$

Równaniu uproszczonemu (20) odpowiada następujące równanie w zapisie rachunku operatorowym:

$$s \cdot L \cdot I(s) - L \cdot I(0) + R \cdot I(s) + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) = E \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \quad (21)$$

Z równania (21) wyznaczamy transformatę Laplace'a prądu w szeregowym obwodzie RLC:

$$I(s) = \frac{1}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot E \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \quad (22)$$

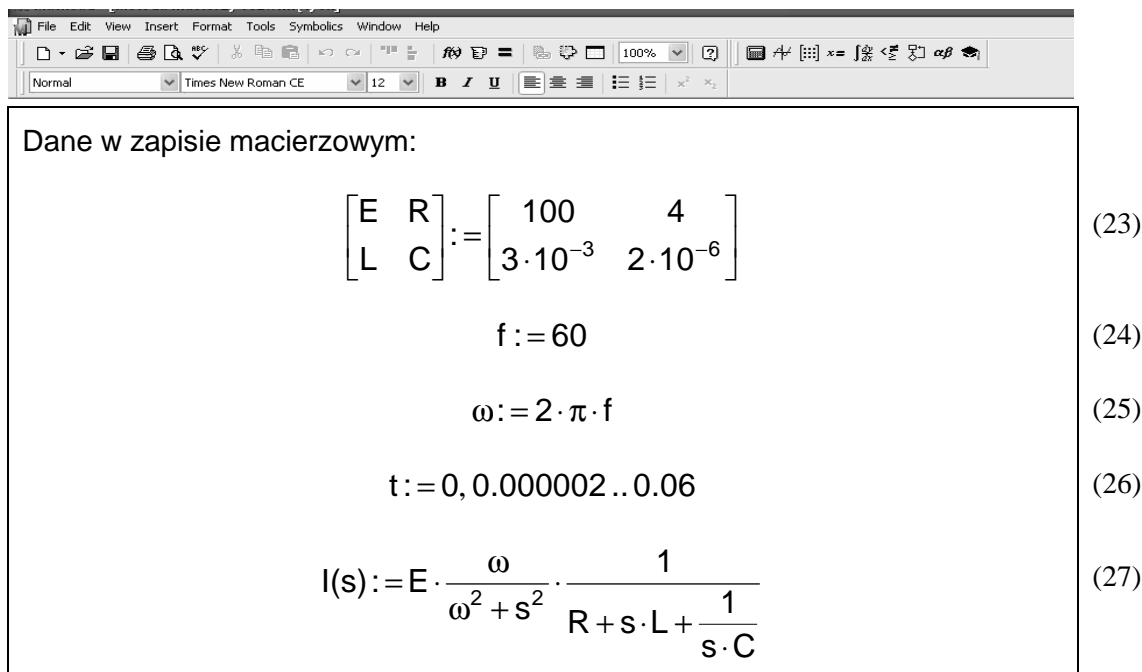
W tabelicy 1 zestawiono oryginały i transformaty wybranych funkcji, które są często spotykane w elektrotechnice.

Tab. 1. Zestawienie oryginałów i transformat Laplace'a wbranych funkcji [1], [2], [12], [16]

Oryginał:	Transformata:	Oryginał:	Transformata:
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	t	$\frac{1}{s^2}$
$\varepsilon(t-a)$	$\frac{1}{s} \cdot e^{-a \cdot s}$	$\delta(t)$	1
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$	$e^{-a \cdot s}, \quad a > 0$	$\frac{1}{s + a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2}$	$e^{a \cdot s}, \quad a < 0$	$\frac{1}{s - a}$

2.1.2. Obliczenia sprawdzające stanu nieustalonego prądu w obwodzie szeregowym RLC metodą transformat Laplace'a w programie MathCAD

Obliczenia prądu w stanie nieustalonym (obwód szeregowy RLC), a także obliczenie odwrotnej transformaty Laplace'a wykonano w programie *MathCAD* (wzory 23-27) [6], [8], [13], [15], [17], [18].



Dane w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} E & R \\ L & C \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 100 & 4 \\ 3 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (23)$$

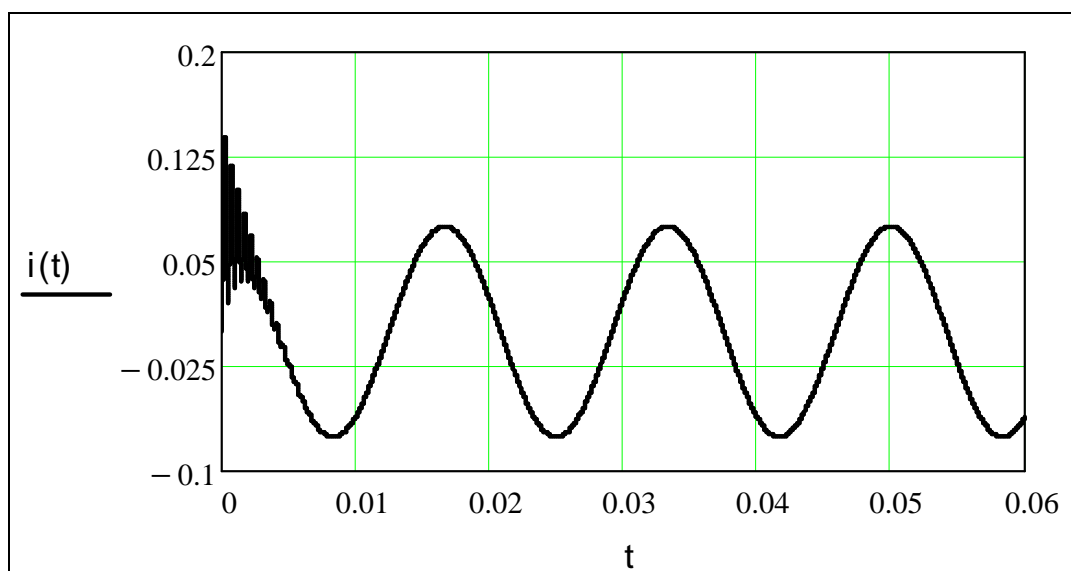
$$f := 60 \quad (24)$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad (25)$$

$$t := 0, 0.000002 .. 0.06 \quad (26)$$

$$I(s) := E \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} \quad (27)$$

Na rysunku 3 zamieszczono wyniki obliczeń sprawdzających prądu w stanie nieustalonym (obwód szeregowy RLC) w programie *MathCAD*.



Rys. 3. Stan nieustalony w obwodzie RLC w programie *MathCAD* otrzymany metoda odwrotnej transformaty Laplace'a

Źródło: Opracowanie własne Autorów

Rys. 3. Transient state in the RLC circuit in *MathCAD* obtained by the inverse Laplace transform method

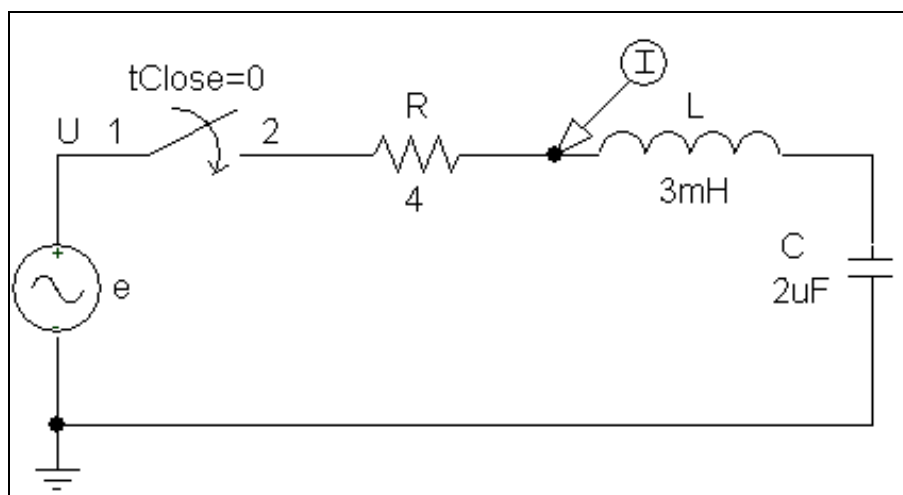
Source: Elaboration of the Authors

2. 2. Obliczenia prądu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC w programie $PSpice$

2.1.1. Wprowadzenie

Symulację załączania obwodu szeregowego RLC do napięcia sinusoidalnego wykonano w programie $PSpice$.

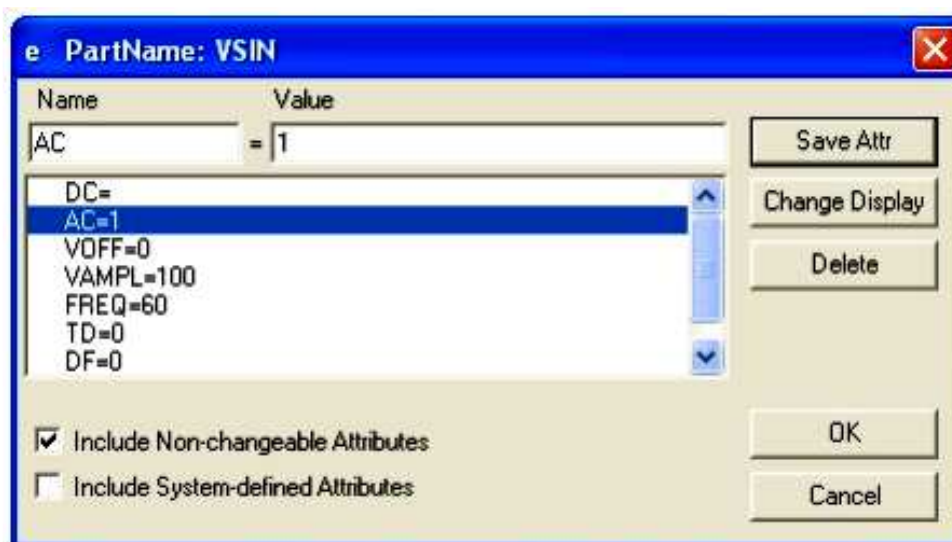
Procedura obliczeniowa w $PSpice$ prądu nieustalonego w rozpatrywanym obwodzie polega na stworzeniu jego schematu (Rys. 4) [3], [5], [7], [10], [19], [20], [22].



Rys. 4. Schemat załączenia szeregowego obwodu RLC do napięcia sinusoidalnego
Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 4. Schemat załączenia szeregowego obwodu RLC do napięcia sinusoidalnego
Source: Elaboration of the Authors

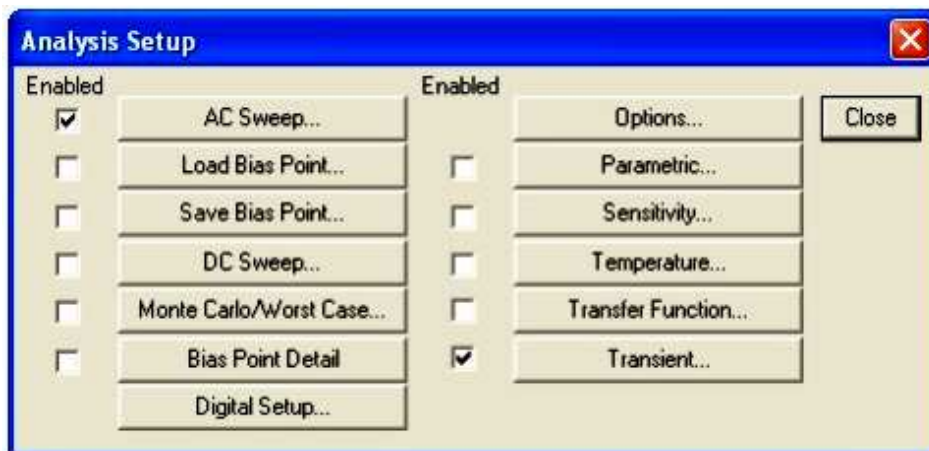
Ponadto w utworzonym schemacie zadeklarowano odpowiednie wartości poszczególnych elementów oraz rodzaj źródła napięcia i jego parametry (Rys. 5).



Rys. 5. Wybór rodzaju źródła napięcia i jego parametrów w programie $PSpice$
Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 5. Selection of the type of voltage source and its parameters in the $PSpice$ program
Source: Elaboration of the Authors

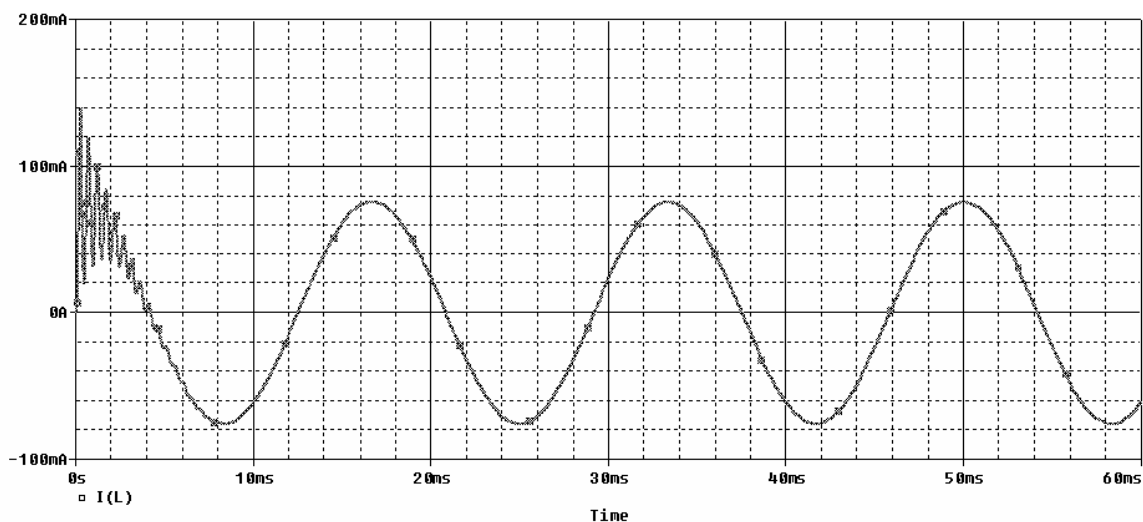
W celu dokonania analizy stanu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC zadeklarowano rodzaj analizy oraz napięcia (*AC Sweep*). Wybór analizy obwodu i napięcia ukazano na rysunku 6.



Rys. 6. Wybór analizy obwodu elektrycznego w programie *PSpice*
Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 6. Selection of electrical circuit analysis in the *PSpice* program
Source: Elaboration of the Authors

Na rysunku 7 zamieszczono wyniki obliczeń sprawdzających prądu w stanie nieustalonym (obwód szeregowy RLC) w programie *PSpice*.



Rys. 7. Stan nieustalony w obwodzie RLC w programie *PSpice*
Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 7. Transient state in the RLC circuit in the *PSpice* program
Source: Elaboration of the Authors

4. Wnioski

- Otrzymano jednakowy kształt przebiegu krzywej prądu nieustalonego przy wyznaczaniu metodą równań różnicowych drugiego rzędu i równaniem różniczkowo-całkowym z wykorzystaniem przekształcenia odwrotnego Laplace'a.
- Otrzymane kształty prądu nieustalonego w obwodzie elektrycznym szeregowym RLC można weryfikować w programie *PSpice*.

Literatura

- [1] Bird J.: *Electrical circuit theory and technology. Revised second edition*. Newnes. Oxford Amsterdam Boston London NY Paris San Diego San Francisco Singapore Sydney Tokyo 2003.
- [2] Fricke H., Vaske P.: *Elektrische Netzwerke: Grundlagen der Elektrotechnik, Teil 1*. Springer Teubner, 1982.
- [3] Frączak P.: *Obliczenia numeryczne obwodów elektrycznych i układów cyfrowych*. Wyd. PPH ZAPOL Dmochowski, Sobczyk Sp.j., Szczecin 2012.
- [4] Graf Urs: *Applied Laplace transforms and z-transforms for scientists and engineers. A computer approach using a Mathematica package*, Birkuser 2004.
- [5] Izydorczyk J.: *PSpice Komputerowa symulacja układów elektronicznych*. Wyd. HELION, Gliwice 1993.
- [6] Jakubowski K. *MathCAD 2000 Profesional*. Wyd. EXIT 2000.
- [7] Król A., Moczko J.: *Symulacja i optymalizacja układów elektronicznych*. Wyd. NAKOM, Poznań 1999, w. 1.
- [8] Larsen R.W.: *Introduction to MathCAD 15*. Pearson, 2010.
- [9] Levy H., Lessman F.: *Równania różnicowe skończone*. PWN, Warszawa 1966.
- [10] Lipiński W.: *Obliczenia numeryczne w teorii sygnałów i obwodów elektrycznych*. Wyd. PPH ZAPOL Dmochowski, Sobczyk Sp.j., Szczecin 2010, wyd. 2, s. 360.
- [11] Lipiński W.: *Podstawy teorii obwodów elektronicznych, Część 1*. Wyd. Uczelniane Pol.
- [12] Lipiński W.: *Wspomagana komputerowo analiz obwodów elektronicznych*. Wyd. Zachodniopomorskiego Centrum Edukacyjnego, Szczecin 2004, w. 3.
- [13] *MathCAD Plus 5.0. Podręcznik użytkownika*. ABB Poland Sp. Z o.o. Kraków 1994
- [14] Mickens R.: *Difference equations, Theory, applications and advanced topics. Third edition*. CRC Press Inc. 2018.
- [15] Motyka R., Rasała D.: *MathCAD Od obliczeń do programowania*. Wyd. HELION, Gliwice 2012.
- [16] Ogrodzki J.: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. PWN, Warszawa 1994.
- [17] Paleczek W.: *MathCAD 12, 11, 2001i, 2001, 2000 w algorytmach*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa 2005.
- [18] Pietraszak J.: *MathCAD Ćwiczenia*. Wyd. HELION, Gliwice 2002.
- [19] Tobin P.: *PSpice for circuit theory and electronic devices synthesis lectures on digital circuits and systems*. Morgan and Claypool Publishers, 2007.
- [20] Wojtuszkiewicz K., Zachara Z.: *PSpice, Przykłady praktyczne*. Wyd. MIKOM, Warszawa 2000, w. 1.
- [21] Yorke R., Hammond P.: *Electric circuit theory, The first edition*. University of Southampton, UK. Pergamon 1981.
- [22] Zachara Z., Wojtuszkiewicz K.: *PSpice, Symulacje wzmacniaczy dyskretnych*. Wyd. MIKOM, Warszawa 2001.