

# DODATNIA POCHODNA GRÜN WALDA-LETNIKOVA JAKO POCHODNA FUNKCJI DROGI

*W artykule przeanalizowano pochodną Grünwalda-Letnikova  $f^{(n)}(t)$  w odniesieniu do klasycznego zagadnienia prędkości, jako pierwszej pochodnej funkcji drogi w czasie  $f^{(1)}(t)$ . Autor argumentuje, że dodatnia pochodna Grünwalda-Letnikova nie spełnia twierdzenia Lagrange'a, co wiąże się z problemami jednoznacznej fizycznej jej interpretacji.*

## WSTĘP

Początek rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów (z ang. fractional calculus) sięga listu Leibniza do de l'Hospitala z 1695 roku, w którym odnosząc się do wymyślonej przez Leibniza notacji  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , pyta: „Co będzie jeśli  $n = 1/2$ ?” [1]. W odpowiedzi Leibniz przypuszcza, że rozwiązaniem będzie nieskończony ciąg wartości w postaci  $d^{1/2} \overline{xy}$  lub  $d^{1:2} \overline{xy}$ . Dalej podkreślając, że geometria i nieskończone ciągi są w dalekich relacjach. Reasumuje, że w przyszłości ten problem będzie rozwiązany.

Z dalekimi relacjami ciągów i geometrii wiąże się problem z fizyczną interpretacją pochodnych ułamkowych, nawet tak banalnego problemu, jakim jest w przypadku pierwszej pochodnej interpretacja pochodnej funkcji położenia, jako chwilowego przyspieszenia. Praktyka potwierdza jednak większą dokładność modeli dynamiki obiektów opartych na pochodnych ułamkowych niż na modelach wychodzących z pochodnej Leibniza. Paradoks braku jest jasnej interpretacji pochodnych ułamkowych i jednocześnie ich praktyczne zastosowanie rodzi pytania dotyczące fizycznych relacji z mierzonymi wielkościami, a niecałkowitym rzędem pochodnej [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

## 1. POCHODNA LEIBNIZA I POCHODNA GRÜN WALDA-LETNIKOVA

Definicję pochodnej dowolnego niecałkowitego rzędu wyprowadza się z definicji pochodnej rzędu pierwszego i następnych, jako granicy funkcji [11]:

$$f'(t) = f^{(1)}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \quad (1)$$

gdzie:  $f(t)$  jest funkcją zmiennej rzeczywistej  $t$ ;  $dt$  jest przyrostem zmiennej niezależnej  $t$ ;  $df(t)$  jest przyrostem funkcji zależnej od  $t$ .

Druga pochodna ma postać:

$$f''(t) = f^{(2)}(t) = \frac{\lim_{dt \rightarrow 0} (f'(t + dt) - f'(t))}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t + 2dt) - 2f(t + dt) + f(t)}{(dt)^2} \quad (2)$$

Dla następnych  $n \in \mathbb{N}$  otrzymuje się pochodną całkowitego rzędu:

$$f^n(t) = f^{(2)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - mdt)}{(dt)^n} = f^{(n)}(t) \quad (3)$$

gdzie:  $dt = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_l - t_{l-1}$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots, l$ ;  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  dla  $n \geq m$ .

Pochodną Grünwalda-Letnikova niecałkowitego rzędu  $\eta \in \mathbb{R}$  wyprowadza się zastępując silnię w definicji  $\binom{n}{m}$  funkcją gamma:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{m! \Gamma(n-m+1)} = \frac{\Gamma(\eta+1)}{m! \Gamma(\eta-m+1)} \quad (4)$$

Wstawiając (4) do (3) otrzymuje się pochodną Grünwalda-Letnikova niecałkowitego rzędu  $\eta \in \mathbb{R}$  [4, 5, 7, 8]:

$$f^{(\eta)}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^p (-1)^m \frac{\Gamma(\eta+1)}{m! \Gamma(\eta-m+1)} f(t - mdt)}{(dt)^\eta} \quad (5)$$

gdzie:  $p = \lfloor \frac{t_l - t_0}{dt} \rfloor$ .

Niech  $p = 1$ ,  $l = n = 1$  i  $(dt = t_2 - t_1) \rightarrow 0$ . Pochodne (3) i (5) przyjmują odpowiednio postać:

$$f^{(1)}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \quad (6)$$

i

$$\frac{d^\eta f(t)}{(dt)^\eta} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t_2) - \eta f(t_1)}{(dt)^\eta} = f^{(\eta)}(t) \quad (7)$$

gdzie:  $\eta$  jest zmienną niezależną (rzędem pochodnej Grünwalda-Letnikova) opisującą zmianę przyrostu  $dt$ ;  $(dt)^\eta$  jest przyrostem opisanym zmienną  $\eta$ ;  $d^\eta f(t)$  jest przyrostem funkcji zależnej od  $(dt)^\eta$ . Z (1.7) wynika, że (6) jest postacią pochodnej (7), dla której rząd  $\eta = 1$ .

Niech rząd  $\eta$  będzie związany z przyrostem  $dt$  zależnością wynikającą z porównania (6) i (7) (rys. 1) [12]:

$$dt = \Delta T + (dt)^\eta \quad (8)$$

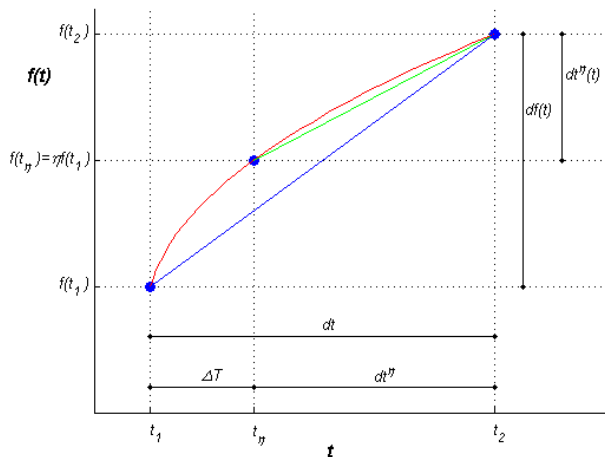
gdzie:

$$\begin{cases} \Delta T > 0 \text{ dla } (dt)^\eta > dt \\ \Delta T = 0 \text{ dla } (dt)^\eta = dt \\ \Delta T < 0 \text{ dla } (dt)^\eta < dt \end{cases}$$

Z definicji pochodnej pierwszego rzędu (6) wynika liniowy przebieg funkcji między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ . Taki sam przebieg funkcji wynika z definicji G-L (7) między  $f(t_\eta)$  i  $f(t_2)$  (rys. 1). Rząd  $\eta$  można interpretować jako parametr, który ma wpływ na nieliniowość przebiegu funkcji  $f(t)$  między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ , gdy nieznane są wartości funkcji dla argumentów z przedziału  $(t_1, t_2)$ .

Z (7) wynika, że zmiana  $\eta$  wpływa na zmianę wartości przyrostu  $dt$  zmiennej niezależnej  $t$  oraz szacuje wartość funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t = t_\eta = t_2 - (dt)^\eta$  (rys. 1):

$$f(t_\eta) = \eta f(t_1) \quad (9)$$



**Rys. 1.** Geometryczna interpretacja pochodnej G-L I pierwszej pochodnej  $dt > (dt)^\eta$

W równaniu (7)  $dt \rightarrow 0$ . Wyrażenie  $dt \rightarrow 0$  jest pojęciem względnym w szczególności, gdy odniesiemy się do praktycznych zastosowań, np. gdy wartości  $f(t)$  w chwilach  $t_1$  i  $t_2$  są wartościami mierzonej prędkości odczytywanymi co czas próbkowania  $dt = t_2 - t_1$ , a  $f'(t)$  jest przyspieszeniem [8]. Z tego powodu przyjmuje się dodatkowe założenie:

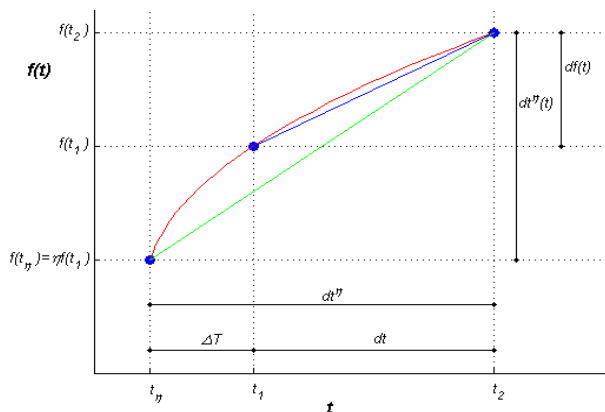
$$0 < dt < 1 \quad (10)$$

Z (10) i (8) wynika:

$$\begin{cases} (dt)^\eta = dt \text{ dla } \eta = 1 \\ (dt)^\eta < dt \text{ dla } \eta > 1 \\ (dt)^\eta > dt \text{ dla } \eta < 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} (dt)^\eta < dt \text{ dla } \eta > 1 \\ (dt)^\eta > dt \text{ dla } \eta < 1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} (dt)^\eta > dt \text{ dla } \eta < 1 \end{cases} \quad (13)$$



**Rys. 2.** Geometryczna interpretacja pochodnej G-L I pierwszej pochodnej  $dt < (dt)^\eta$

Na rys. 1 pokazano przypadek dla (12). Dla (11)  $f(t_\eta) = f(t_1)$ . Na rys. 2 pokazano przypadek dla (13). Z rys. 1 i rys. 2, (11-13) wynika, że  $\eta$  jest parametrem szacującym wartość funkcji  $f(t)$  dla  $t = t_\eta$  na podstawie wartości  $f(t_1)$  i przyrostu  $(dt)^\eta$ :

$$\begin{cases} |f(t_\eta)| < |f(t_1)| \text{ dla } t_\eta < t_1 \\ |f(t_\eta)| = |f(t_1)| \text{ dla } t_\eta = t_1 \\ |f(t_\eta)| > |f(t_1)| \text{ dla } t_1 < t_\eta < t_2 \end{cases} \quad (14)$$

Bezwzględne wartości w równaniach (14) uwzględniają możliwą minusową wartość  $f(t_\eta)$ .

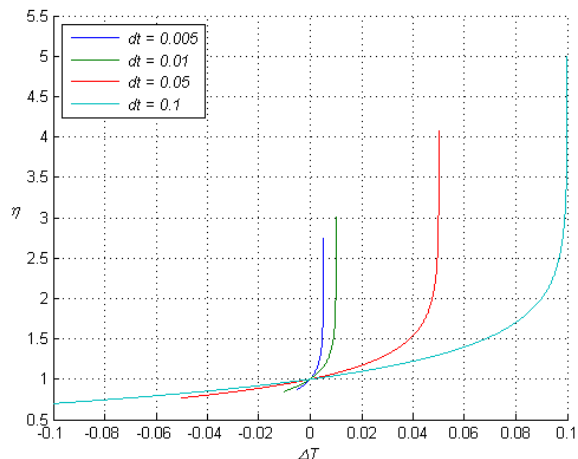
Fizyczną interpretacją pierwszej pochodnej funkcji opisującej położenie jest prędkość chwilowa (1). Ponieważ w (1) zakłada się, że  $dt \rightarrow 0$ , implikuje to liniową charakterystykę zmian  $f(t)$  między  $t_1$  i  $t_2$ . Z punktu widzenia pochodnej Grünwalda-Letnikova jest to jednak przypadek szczególny, w którym rząd  $\eta = 1$ , a dla  $\eta \neq 1$  przebieg zmian ma nieliniowy charakter. Można więc stwierdzić, że pochodna Grünwalda-Letnikova określa prędkość chwilową, przy nieliniowej charakterystyce zmian funkcji położenia określonej przez rząd  $\eta$ .

## 2. WŁAŚCIWOŚCI $\eta$ -RZĘDU POCHODNEJ GRÜN WALDA-LETNIKOWA

Z równania (8) wynika:

$$\eta = \log_{dt}(dt - \Delta T) \quad (15)$$

Na rys. 3 pokazano zależność  $\eta(\Delta T)$  dla przykładowych wartości  $dt$  w zakresie od  $-\Delta T$  do  $\Delta T$ .



**Rys. 3.** Zależność  $\eta(\Delta T)$

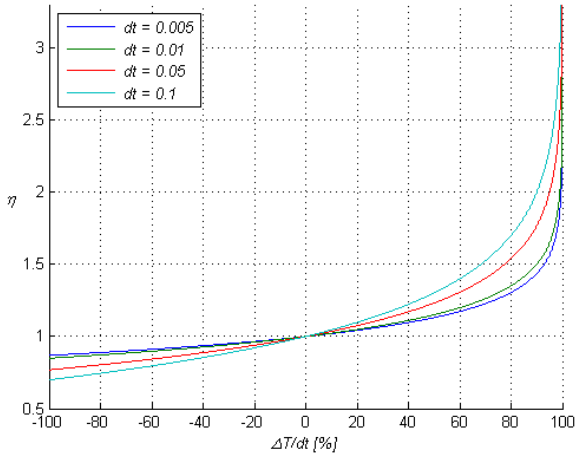
Z rys. 3 wynika, że  $\eta > 1$  dla  $\Delta T > 0$  (lub inaczej dla  $dt > (dt)^\eta$ ) oraz  $\eta < 1$  dla  $\Delta T < 0$  (dla  $dt < (dt)^\eta$ ). Charakterystyczną rzeczą jest, że przebiegi dla wartości  $+\Delta T$  i  $-\Delta T$  mają inny przyrost  $\Delta\eta$  dla tych samych  $|\Delta T|$ . W przypadku dużych względnych wartości  $|\Delta T/dt|$  powoduje to, że dla dodatnich  $\Delta T$  (gdy  $t_1 < t_\eta < t_2$ ),  $\eta$  rośnie od 1 do asymptoty w  $dt$  tym szybciej, im  $dt$  jest większe (rys. 4). Taka właściwość powoduje, że  $f(t_\eta)$  może przyjmować wartości znacznie odbiegające wartości leżących na prostej łączącej  $(t_1, f(t_1))$  i  $(t_2, f(t_2))$ . Im większa jest ta wartość, tym większa jest nieliniowość  $f(t)$  między  $(t_1, f(t_1))$  i  $(t_2, f(t_2))$ . Dla ujemnych  $\Delta T$  przyrost  $\Delta\eta$  jest ujemny i bezwzględnie dużo mniejszy niż dla dodatnich  $\Delta\eta$  (rys. 4).

Z (9) wynika, że  $f(t_\eta)$ , dla  $t_\eta = t_1 + \Delta T$  (rys. 1), jest szacowany przez  $f(t_1)$ . Dla (15) wynika jednak, że nie można bezkrytycznie przyjąć takiego założenia dla wszystkich  $t_\eta \in (t_1, t_2)$ , gdyż:

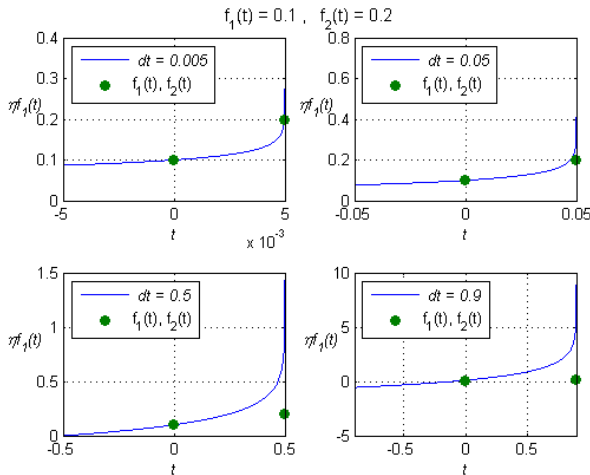
$$\forall (t_\eta \in \langle -t_1, t_2 \rangle) \wedge \begin{cases} f(t_1) > 0: f(t_\eta) > f(t_1) \\ f(t_1) = 0: f(t_\eta) = 0 \\ f(t_1) < 0: f(t_\eta) < f(t_1) \end{cases} \quad (16)$$

oraz

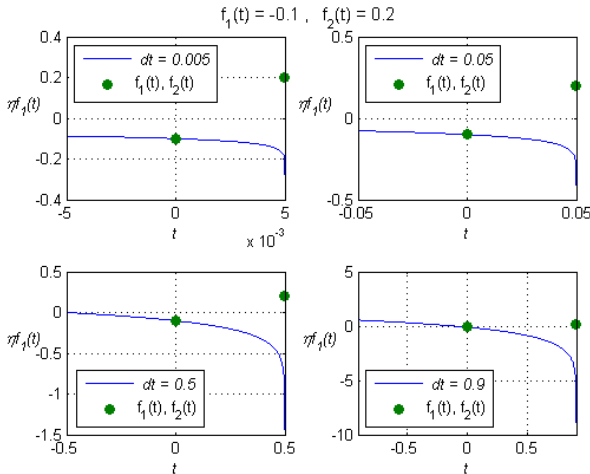
$$\forall (t_\eta \rightarrow t_2) \wedge \begin{cases} f(t_1) > 0: f(t_\eta) \rightarrow +\infty \\ f(t_1) = 0: f(t_\eta) = 0 \\ f(t_1) < 0: f(t_\eta) \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (17)$$



**Rys. 3.** Zależność  $\eta(\Delta T)$  [%]



**Rys. 5.** Zależność  $\eta f(t_1)$  dla  $f(t_1) = 0,1$  i  $f(t_2) = 0,2$



**Rys. 6.** Zależność  $\eta f(t_1)$  dla  $f(t_1) = -0,1$  i  $f(t_2) = 0,2$

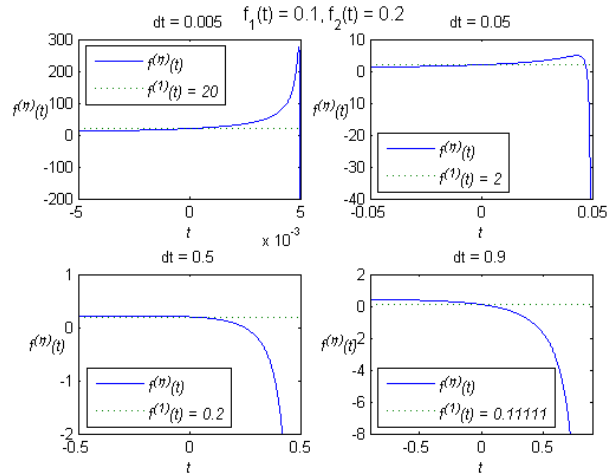
Na rys. 5 i 6 pokazano przebieg  $f(t_\eta) = \eta f(t_1)$ , dla przykładowych wartości  $f(t_1), f(t_2)$  i  $dt$ .

Z  $f(t_\eta \rightarrow t_2) \rightarrow \pm\infty$  (1.17) wynika, że (9) dla rzędu (15) nie może być funkcją szacującą nieznane wartości funkcji  $f(t)$  dla dowolnych  $t$ , znanych  $f(t_1), f(t_2)$  i  $dt$ . W szczególnych przypadkach jest to możliwe dla małych  $dt$  i gdy  $t_\eta \rightarrow t_2$ . Ilustruje to przykład z rys. 5 dla  $dt = 0,005$ .

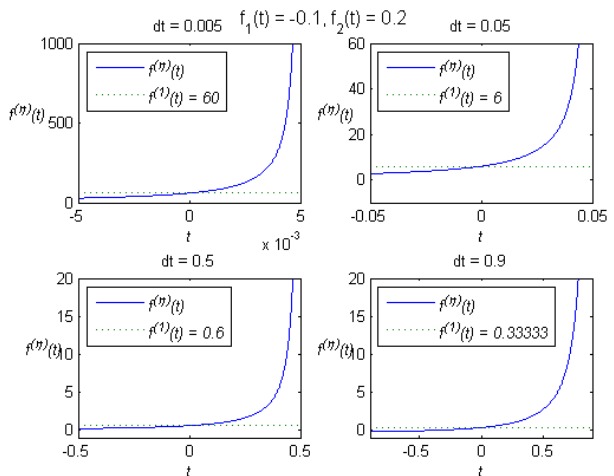
### 3. POCHODNA $f^{(\eta)}(t)$

Zasadniczym celem pochodnej G-L (7) nie jest oszacowanie  $f(t_\eta)$ , tylko wyznaczenie pochodnej niecałkowitego rzędu  $f^{(\eta)}(t)$ , gdzie  $t = t_\eta$  i przyrost  $dt = (dt)^\eta$ . Odbywa się to przez wyznaczenie przyrostu  $(dt)^\eta$ , gdzie zależność między  $\eta$  i  $dt$  opisuje (15) oraz przez oszacowanie nieznanej wartości  $f(t_\eta)$  (9).

Pochodna (7) zależy od wartości  $f(t_1), f(t_2), dt$  i  $\eta$ . Ponieważ  $\eta$  związane jest logarymiczną zależnością z  $dt$  (15), to zależność ta przenosi się na kształt charakterystyki  $f^{(\eta)}(t)$ . Na rys. 7 i 8 pokazano przebieg pochodnej niecałkowitego rzędu (1.7) oraz pochodną pierwszego rzędu (6) dla  $t_\eta \in \langle t_1 - dt, t_2 \rangle$ . Pochodna  $f^{(1)}(t)$  ma stałą wartość dla dowolnego  $t_\eta$ , gdyż reprezentuje ona pochodną dla liniowej zmiany wartości między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ .



**Rys. 7.** Wartości pochodnej  $f^{(\eta)}(t)$  dla  $f(t_1) = 0,1$ ,  $f(t_2 = t_1 + dt) = 0,2$

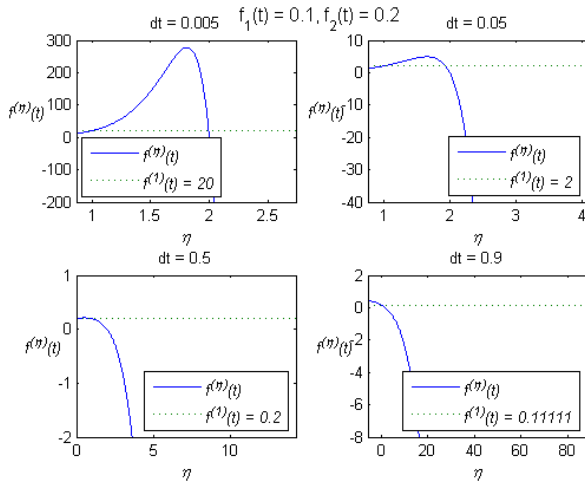


**Rys. 8.** Wartości pochodnej  $f^{(\eta)}(t)$  dla  $f(t_1) = -0,1$ ,  $f(t_2 = t_1 + dt) = 0,2$

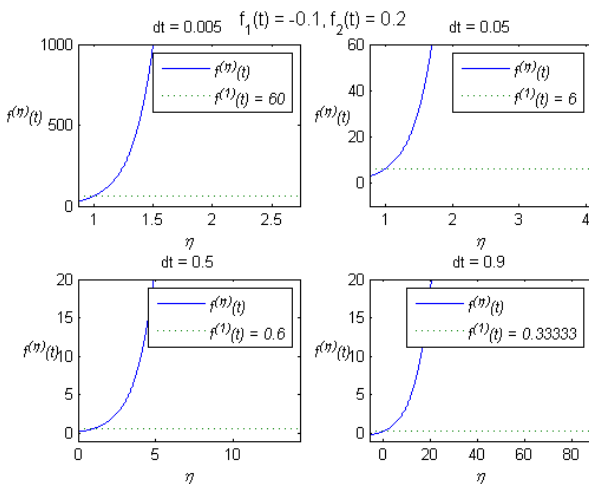
Na rys. 9 i 10 pokazano charakterystyki  $f^{(n)}(\eta)$ . Krańcowe wartości osi  $\eta$  odpowiadają wartościom w  $t_\eta = -dt$  i  $t_\eta = dt$ . Dla  $dt = 0,9$  zwraca uwagę ujemna wartość  $\eta$ . Wartość ta wynika z przyrostu, gdy:

$$(dt)^\eta = dt - (-\Delta T) > 1 \quad (18)$$

i założenia (10).



Rys. 9. Wartości pochodnej  $f^{(n)}(t)$  dla  $f^{(n)}(\eta)$  dla  $f(t_1) = 0,1$ ,  $f(t_2) = 0,2$



Rys. 10. Wartości pochodnej  $f^{(n)}(t)$  dla  $f^{(n)}(t)$  dla  $f(t_1) = -0,1$ ,  $f(t_2) = 0,2$

Charakterystyki z rys. 7-10 pokazują zależność przebiegu pochodnej G-L (1.6) od funkcji wiążącej rząd  $\eta$  i przyrost  $dt$  (15) oraz od znaku  $f(t_1)$ . Zależność ta jest nieliniowa i

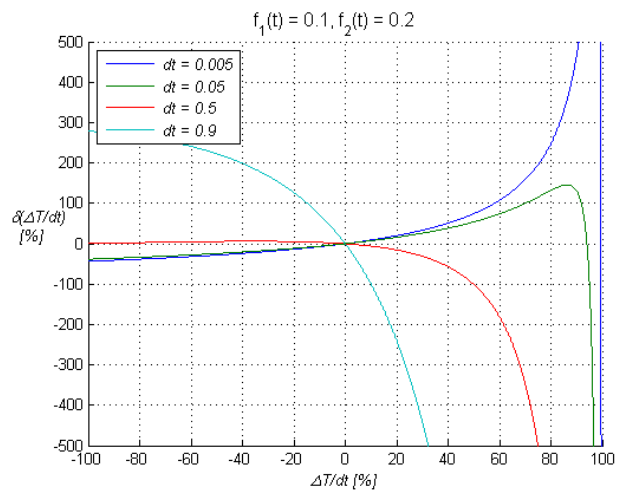
$$\forall (t_\eta \rightarrow t_2) \wedge \begin{cases} f(t_1) \geq 0: f^{(n)}(t_\eta) \rightarrow -\infty \\ f(t_1) < 0: f^{(n)}(t_\eta) \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (19)$$

(19) jest prawdziwe niezależnie od znaku  $f(t_2)$ .

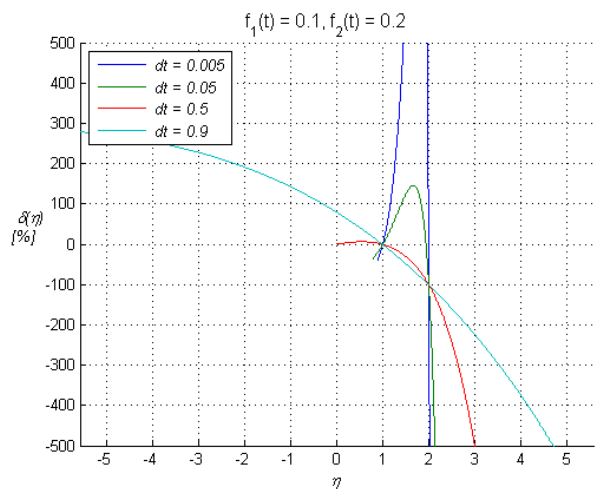
Niech  $\delta_\eta(\Delta T)$  będzie względną różnicą między pochodną G-L i pierwszą pochodną:

$$\delta_\eta = \frac{f^{(n)}(t_\eta) - f^{(1)}(t_\eta)}{f^{(1)}(t_\eta)} \cdot 100\% \quad (20)$$

(20) można nazwać wskaźnikiem nieliniowości pochodnej rzędu  $\eta$ . Na rys. 11 i 13 pokazano  $\delta_\eta(\Delta T/dt)$ , gdzie zależność między  $\Delta T$ ,  $dt$  i  $\eta$  opisuje (15).

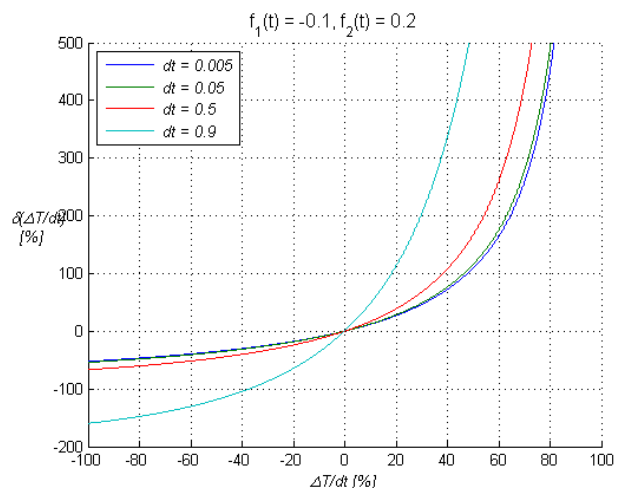


Rys. 11. Charakterystyka  $\delta_\eta(\Delta T/dt)$  dla dodatniego  $f(t_1)$

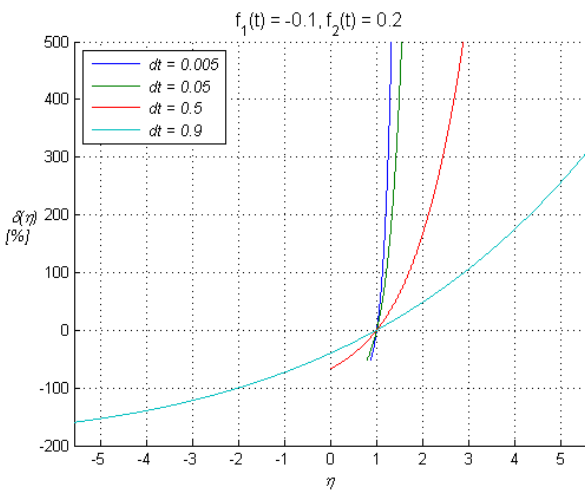


Rys. 12. Charakterystyka  $\delta_\eta(\eta)$  dla dodatniego  $f(t_1)$

Na rys. 12 i 14 pokazano  $\delta_\eta(\eta)$ . Krańcowe wartości osi  $\eta$  odpowiadają wartościom w  $t_\eta = -dt$  i  $t_\eta = dt$ .



Rys. 13. Charakterystyka  $\delta_\eta(\Delta T/dt)$  dla ujemnego  $f(t_1)$



**Rys. 14.** Charakterystyka  $\delta_\eta(\eta)$  dla ujemnego  $f(t_1)$

Właściwości  $\delta_\eta$  (1.20) (parametru opisującego nieliniowość pochodnej funkcji  $f(t)$  między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\eta < 1): \delta_\eta < 0 \text{ i } f(t) \text{ jest nieliniową funkcją} \\ \text{między } f(t_1) \text{ i } f(t_2) \\ \forall (\eta = 1): \delta_\eta = 0 \text{ i } f(t) \text{ jest liniową} \\ \text{funkcją między } f(t_1) \text{ i } f(t_2) \\ \forall (\eta > 1): \delta_\eta > 0 \text{ i } f(t) \text{ jest nieliniową funkcją} \\ \text{między } f(t_1) \text{ i } f(t_2) \end{array} \right. \quad (21)$$

Niech  $t_1 < t_\eta < t_2$  (rys. 1). Pochodna G-L wyznacza wartość pochodnej w punkcie  $t_\eta$  funkcji  $f(t)$  między dwoma punktami  $(t_\eta, \eta f(t_2))$  i  $(t_2, f(t_2))$  znajdującymi się w odległości  $(dt)^\eta$  (7). Ponieważ  $f(t)$  jest funkcją ciągłą między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ , to wartość  $f(t_\eta) = \eta f(t_1)$  (lub  $f(t_\eta) \cong \eta f(t_1)$ ) powinna leżeć na przebiegu funkcji  $f(t)$ .  $\eta$  ma wartości od 1 do  $\log_{dt}(dt - \Delta T)$  (rys. 3) i dla  $t_1 < t_\eta < t_2$  może osiągać duże wartości. To powoduje, że  $f(t_\eta)$  może być wielokrotnie większe od  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ . Im większe  $dt$ , tym ta różnica będzie większa (część dodatnia  $\Delta T$  na rys. 3). W przypadkach, gdy różnica między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$  jest niewielka może to powodować, że  $\eta f(t_1)$  będzie znacznie odbiegać od rzeczywistej wartości  $f(t_\eta)$  leżącej na przebiegu funkcji  $f(t)$ .

Dla  $t_1 > t_\eta$  (rys. 2),  $t_\eta$  leży poza zakresem  $[t_1, t_2]$ .  $\eta$  zmienia się w tym przypadku jak w części ujemnej  $\Delta T$  na rys. 3. Jeżeli  $f(t)$  jest funkcją rosnącą ( $f(t_1) < f(t_2)$ ), to można założyć z pewnym zakresem tolerancji, że  $\eta f(t_1)$  estymuje wartość  $f(t_\eta)$  ponieważ  $f(t_\eta) < f(t_1) < f(t_2)$  i  $f(t)$  w przedziale  $[t_1, t_\eta]$  jest funkcją rosnącą. Z  $f(t_1) > f(t_2)$  (gdy  $f(t)$  jest funkcją malejącą) wynika, że dla  $\eta < 1$  zachodzi  $f(t_\eta) < f(t_1) > f(t_2)$  i  $f(t)$  z przedziału  $[t_\eta, t_1]$  jest funkcją rosnącą w przeciwieństwie do przedziału  $[t_1, t_2]$ , gdzie  $f(t)$  jest funkcją malejącą. Wynika z tego, że  $\eta f(t_1)$  nie jest estymatą funkcji  $f(t)$  w  $t_\eta$ .

## PODSUMOWANIE

W pracy przeanalizowano sposób szacowania wartości funkcji w  $f(t_\eta)$  oraz wartości pochodnej G-L dla przykładowych  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ . Szacowanie  $f(t_\eta)$  odbywa się wg logarytmicznej zależności między  $\eta$ ,  $dt$  i  $\Delta T$  oraz nie uwzględnia ono wartości  $f(t_2)$ . Z tego powodu  $f(t_\eta \rightarrow t_2) \rightarrow \pm\infty$ , co sprawia, że oszacowanie  $f(t_\eta)$  nie jest prawdziwe dla każdego  $t_\eta$ .

Z pochodnej G-L (7) wynika, że rząd  $\eta$  zależny jest od zmiany przyrostu  $dt$  zmiennej niezależnej  $dt$  w  $(dt)^\eta$  (8) oraz wartości

funkcji  $f(t)$  w punkcie  $t = t_\eta = t_2 - (dt)^\eta$  (rys. 1), która szacowana jest przez (9). Rząd  $\eta$  opisuje więc liniowy (dla  $\eta = 1$ ) lub nieliniowy (dla  $\eta \neq 1$ ) przebieg  $f(t)$  między  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$ . Parametr nieliniowości  $\delta_\eta$  określony został jako względna różnica między pochodną G-L i pierwszą pochodną.

Ze względu, że  $f(t_\eta \rightarrow t_2) \rightarrow \pm\infty$ , to również  $f^{(\eta)}(t_\eta \rightarrow t_2) \rightarrow \pm\infty$ . Pochodna G-L powinna jednak, dla  $t_\eta \rightarrow t_2$ , mieć wartość  $f^{(\eta)}(t_\eta \rightarrow t_2) \cong f^{(1)}(t_\eta \rightarrow t_2) = f^{(1)}(t)$ , gdyż  $f(t_\eta \rightarrow t_2)$  leży coraz blisko wartości prostej łączącej  $f(t_1)$  i  $f(t_2)$  (rys. 1). Z tego względu nie można uznać pochodnej G-L za pochodną oddającą wartość pochodnej nieliniowej funkcji  $f(t)$  w całym przedziale  $t$ .

Powyższe stwierdzenie potwierdzają charakterystyki na rys. 7 i 8. Na rysunkach wartość  $f^{(\eta)}(t)$  równa jest  $f^{(1)}(t)$  tylko, gdy  $\Delta T = 0$ , a więc, gdy  $t_\eta = t_1$ . Z twierdzenia Lagrange'a wynika jednak, że powinien istnieć taki punkt  $t_\eta \in (t_1, t_2)$ , w którym styczna do  $f$  jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez  $(t_1, f(t_1))$  i  $(t_2, f(t_2))$  [11]. Tym samym, dla co najmniej jednej wartości  $t_\eta$  powinna być spełniona równość  $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{dt} = f^{(\eta)}(t_\eta)$ . Z charakterystyk na rys. 7 i 8 wynika, że zależność ta nie jest spełniona. W rozpatrywanych przypadkach przebieg pochodnej G-L dla  $\eta \neq 1$  i tw. Lagrange'a wykluczają się wzajemnie.

Interpretując pochodną Grünwalda-Letnikova jako pochodną funkcji położenia, a więc prędkość chwilową, trzeba stwierdzić, że zależność wiążąca rząd z przyrostem czasu (8) i jednocześnie estymująca wartość położenia w  $t_\eta$  (9), nie pozwala na stwierdzenie, że pochodna Grünwalda-Letnikova w całym zakresie  $t_\eta \in (t_1, t_2)$  opisuje prędkość chwilową nieliniowych zmian położenia.

## BIBLIOGRAFIA

- Leibnitz G. W. *Letter from Hanover, Germany to G. F. A. L'Hospital, September 30, 1695*, in *Mathematische Schriften* 1849, reprinted, Hildesheim, Olms Verlag 2, pp.301-302, 1962.
- Abel N. H. *Oeuvres completes de Niels Henrik Abel*, vol. 1, 1881.
- Ross B. *The development of fractional calculus 1695-1900*, *Historia Mathematica* 4, pp.75-89, Academic Press, 1977.
- Oldham K. B, Spanier J. *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York London, 1974.
- Miller K. S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley & Sons, Inc. 1993.
- Letnikov A. V.: *An explanation of the main concepts of the theory of differentiation of arbitrary index*, (in Russian), *Moskow Mat. Sb.* 6, No 1, p. 413-445, 1872.
- Das S.: *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008.
- Herrmann R.: *Fractional Calculus. An Introduction For Physicists*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2011.
- Petras, I.: *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, *Nonlinear Physical Science*, Springer Science & Business Media, 2011.
- Podlubny I.: *Fractional Differential Equations*, *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.
- Apostol T., M.: *Calculus vol. 1, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc. 1967.
- Cioć R.: *Physical and geometrical interpretation of Grünwald-Letnikov differintegrals: measurement of path and acceleration*, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, FCAA, Vol. 19, No 1(2016), pp. 161-172, (Print) ISSN 1311-0454, (Electronic) ISSN 1314-2224, DOI: 10.1515/fca-2016-0001.



### Positive Grünwolda-Letnikova derivative as derivative of path function

*The paper analyses Grünwald-Letnikov  $f^{(n)}(t)$  derivative in space of first order derivative  $f^{(1)}(t)$  and also analyses the classical interpretation of derivative of path function as velocity. The author argues that the Grünwald-Letnikov positive derivative does not fulfil the Lagrange Theorem (Mean-Value Theorem for Derivatives) and this problem causes not clear physical interpretation of the Grünwald-Letnikov positive derivative.*

Autor:

dr inż. **Radosław Cioć** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki