

## Methodology of structures damage estimation in case of cantilever isotropic beam

Metodyka oceny uszkodzenia elementów konstrukcyjnych na przykładzie belki izotropowej jednostronnie utwierdzonej

### Streszczenie

W pracy zbudowano model numeryczny belki wspornikowej z uszkodzeniem i bez uszkodzenia oraz wyznaczono ich częstotliwości własne dla zadanych charakterystyk materiałowych. Następnie przeprowadzono badania na fizycznym obiekcie przy użyciu wibrometru laserowego PSV-500 firmy Polytec. Otrzymane rezultaty doświadczalne porównano z wynikami obliczeń numerycznych stosując metody analizy sygnału oparte na wykresach płaszczyzny fazowej.

**Słowa kluczowe:** detekcja uszkodzeń, belka wspornikowa, płaszczyzna fazowa

### Abstract

This paper focuses on analysis of damage detection cantilever beam. Finite Element Method was used to simulate vibrations of the intact and the damaged beams. Analysis of natural frequencies of both the intact and the damaged beams was performed in order to observe the effect of damage on the beams dynamics. Next, the phase diagrams technique was applied and finally, experimental verification was performed to check the numerical results.

**Keywords:** damage detection, cantilever beam, phase space diagram

## 1. Wprowadzenie

W wielu współczesnych konstrukcjach różnego typu mogą pojawić się wady prowadzące do znacznej redukcji sztywności, zmieniające całkowicie mechaniczne zachowanie danej konstrukcji. Wyzwaniem staje się więc wykrycie i zlokalizowanie zwłaszcza ukrytej wady. Narzędziem diagnostyki stanu i oceny niezawodności może być uzyskany sygnał z pomiaru drgań mechanicznych badanego układu. W wielu gałęziach przemysłu i aspektach przemysłowych eksploatacji maszyn i urządzeń istotnym narzędziem diagnostyki stanu jest pomiar drgań mechanicznych. Uzyskany sygnał stanowi często źródło informacji o stanie maszyny/urządzenia i ocenie jej niezawodności [1].

Problematyka wykrywania defektów jest utrudniona ze względu na wiele rodzajów takich uszkodzeń. Badania tego typu prowadzone są w mikroskali

---

<sup>1</sup> s.samborski@pollub.pl, Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska, www.samborski.pollub.pl,

<sup>2</sup> j.wieczorkiewicz@pollub.pl, Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska, www.kms.pollub.pl,

<sup>3</sup> r.rusinek@pollub.pl, Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska, www.raf.pollub.pl

<sup>4</sup> j-dziedzic13@wp.pl, Studenckie Koło Naukowe przy Katedrze i Zakładzie Ortopedii Szczykowej, Uniwersytet Medyczny w Lublinie, Politechnika Lubelska

[2÷5] jak również w makroskali, kiedy możliwe jest wykrywanie delaminacji w kompozytach [6] oraz w materiałach metalicznych [7, 8].

Metody wykrywania uszkodzeń często bazują na pomiarze i analizie drgań struktur belkowych i płytowych [9÷13] gdzie analizowane są częstości i postacie własne.

Interesujące podejście do problemu identyfikacji i lokalizacji uszkodzeń przedstawiono w pracy [14], gdzie wykorzystano mapy Poincaré.

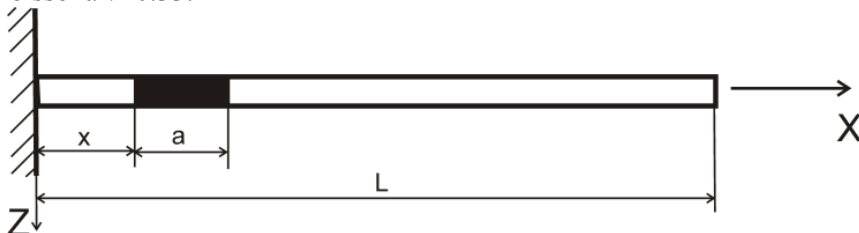
Inną, nowatorską metodą służącą identyfikacji uszkodzeń jest użycie diagramów rekurencyjnych. Konstrukcja diagramów bazuje na metodzie współrzędnych opóźnionych, którą opisano szczegółowo w pracach [15, 16]. Zaletą tej metody jest możliwość jej stosowania zarówno eksperymentalnych sygnałów pomiarowych z rzeczywistego obiektu badawczego [17, 18] jak i symulacji numerycznych [19]. Koncepcja wprowadzenia rekurencyjności do analizy układów dynamicznych została wprowadzona przez Henri Poincaré w jeszcze 1890 roku [20]. Jednak jej praktyczne zastosowanie wymagało skomplikowanych i czasochłonnych obliczeń numerycznych, stąd na jej wykorzystanie trzeba było poczekać wiele lat do momentu pojawienia się odpowiednio szybkich maszyn obliczeniowych. Po raz pierwszy metoda analizy diagramów rekurencyjnych została wykorzystana w pracy [21]. Od tego momentu została ona szeroko rozpowszechniona w różnych dziedzinach techniki i medycyny [22÷41].

Niniejsza praca omawia problem wykrywania uszkodzenia na przykładzie belki wykonanej ze stopu aluminium. Kilkoma metodami porównano drgania belki bez uszkodzenia (zdrową) oraz z uszkodzeniem. W tym celu przeprowadzono badania numeryczne przy użyciu komercyjnego programu ABAQUS/CAE w wersji 6.13-3 [42], który umożliwia modelowanie właściwości materiałów w zagadnieniach statycznych oraz dynamicznych. Następnie w celu weryfikacji wyników symulacji numerycznej zaproponowano nową metodę opartą na bezkontak-towym pomiarze drgań mechanicznych przy użyciu wibrometru laserowego. W pierwszym etapie zbudowano model numeryczny badanej belki oraz wyznaczono jej częstości własne dla zadanych charakterystyk materiałowych. W drugim etapie przeprowadzono badania na fizycznym obiekcie przy użyciu wibrometru laserowego PSV-500 firmy Polytec. Otrzymane rezultaty doświadczalne porównano z wynikami obliczeń numerycznych.

Celem niniejszej pracy jest sprawdzenie możliwości wykrywania uszkodzeń poprzez analizę częstości i amplitudy drgań struktur belkowych.

## 2. Analiza MES drgań własnych i wymuszonych belki

Przedmiotem analizy była jednostronnie utwierdzona belka wykonana ze stopu aluminium (izotropowa) w postaci profilu pełnego o wymiarach 20 x 5 x 800 mm, o gęstości  $\rho=2720 \text{ kg/m}^3$ , moduł Younga  $E=70 \text{ GPa}$ , liczba Poissona  $\nu=0.33$ .



Rysunek 1. Schemat belki wspornikowej z defektem [opracowanie własne]

Analizę numeryczną przeprowadzono w programie Abaqus/CAE w wersji 6.13-3 dla belki „zdrowej” (bez defektu) i uszkodzonej. W belce uszkodzonej wprowadzono sztuczny defekt w postaci lokalnego zmniejszenia grubości z 5mm do 3mm. Jego długość  $a=80\text{mm}$  stanowiła 10% całkowitej długości belki, a współrzędna początku defektu licząc od miejsca zamocowania (Rysunek 1) wynosiła  $x=40\text{mm}$ .

Pierwszym krokiem w analizie numerycznej było wyznaczenie częstości drgań własnych belki. Następnie zbadano dynamiczne zachowanie się belki „zdrowej” i uszkodzonej oraz wyznaczono przemieszczenia swobodnego końca belki. Belkę modelowano w środowisku ABAQUS/CAE jako obiekt jednowymiarowy typu „wire” [15]. Zastosowano liniowe elementy skończone pierwszego rzędu typu B21 z biblioteki elementów skończonych ABAQUS Standard. Umożliwiają one m.in. uwzględnienie efektów ścinania. Do rozwiązania zagadnienia własnego użyto algorytmu Lanczosa. Uzyskane wartości częstości własnych dla belki „zdrowej” i uszkodzonej zebrano w Tabeli 1. Na podstawie uzyskanych częstości własnych dobrano częstość wymuszenia, tak aby uniknąć zjawiska rezonansu podczas analizy numerycznej przebiegów czasowych drgań wymuszonych obu modeli belek.

W związku z tym, że pierwsza częstość dla belki z defektem wyniosła  $f_1^u = 4,43 \text{ Hz}$ , dobrano częstość wymuszenia równą  $f_e = 2\text{Hz}$  oraz próbkowanie  $\Delta t = 0,02\text{s}$ . Na całej długości belki zadano obciążenie okresowo zmiennym ciśnieniem o amplitudzie  $P=1\text{kPa}$ , zgodnie z zależnością:

$$p(t) = P \sin(2\pi f_e t) \quad (1)$$

Przebiegi czasowe drgań wymuszonych odpowiadające przemieszczeniom końca belki przedstawiono na Rys. 4 (drgania ustalone).

## Pomiar drgań belki za pomocą wibrometru laserowego

Z punktu widzenia wiarygodności otrzymywanych wyników pomiarów ważne jest, aby sprzęt pomiarowy nie wpływał na badany obiekt. Aby zminimalizować m.in. wpływ aparatury pomiarowej na badany obiekt, przeprowadzono badania za pomocą wibrometru laserowego. Wibrometr laserowy zapewnia pomiar bezdotykowy drgań, dzięki czemu eliminuje się zakłócenia spowodowane masą czujników pomiarowych, wahaniami temperatur, sposobem mocowania itp. Ponadto pomiary mogą być wykonywane z dużej odległości. Do pomiarów wykorzystano trzy niezależne głowice pomiarowe wraz z kontrolerem PSV-500 firmy Polytec. Głowice te są wyposażone w wysokiej rozdzielczości układ optyczny i analizator, który analizuje odbity od obiektu badań promień lasera [1]. Ponadto jedna z głowic posiada kamerę wideo (Rysunki 2 i 3).



Rysunek 2. Głowice pomiarowe PSV-500 firmy Polytec [fot. własne]



Rysunek 3. Kontroler wibrometru PSV-500 firmy Polytec [fot. własne]

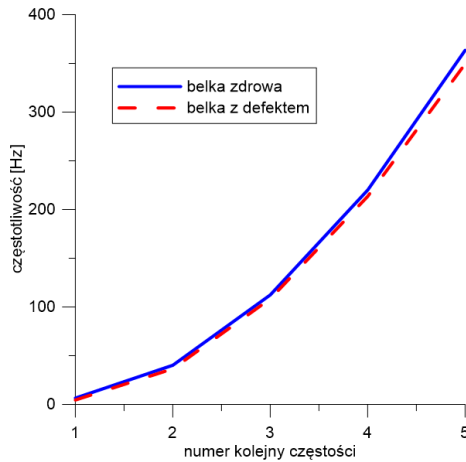
Dostępny zestaw umożliwia pomiary prędkości w zakresie  $\pm 10 \frac{m}{s}$  w szerokim zakresie częstotliwości od 1Hz do 100kHz. Ponadto pomiary mogą być wykonywane z odległości od 42cm do kilkuset metrów od badanego obiektu.

Zasada działania wibrometru laserowego wykorzystuje zjawisko Dopplera, które polega na porównaniu długości fali wiązki światła laserowego odbitego od badanego obiektu i docierającego do fotodetektora ze znanym sygnałem referencyjnym. W sytuacji, gdy źródło fali lub odbiornik porusza się, częstotliwość fali zmienia się. Częstotliwość fali rośnie przy wzajemnym zbliżaniu się źródła i odbiornika, a maleje podczas oddalania. Mierząc te różnice częstotliwości, można bezpośrednio odczytać prędkość badanego obiektu. Dalsza cyfrowa obróbka sygnału pozwala uzyskać informacje o amplitudzie drgań, prędkości i widmie częstotliwościowym, a poprzez analizę sygnałów z wielu punktów pomiarowych znajdujących się na badanym obiekcie możliwe jest również przeprowadzenie analizy modalnej [1].

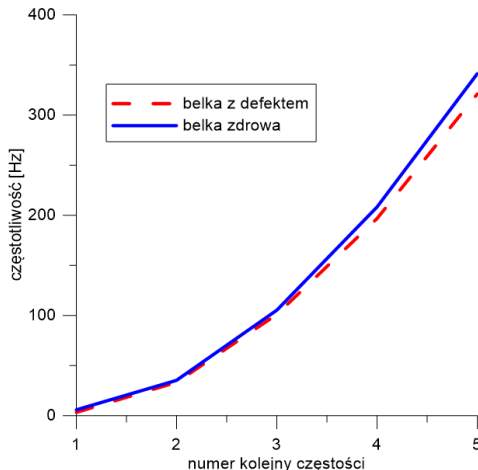
### 3. Dyskusja wyników symulacji i pomiarów stanowiskowych

Tabela 1 przedstawia wyniki obliczeń częstości drgań własnych belki bez defektu (zdrowej) oraz z defektem uzyskane w programie ABAQUS/CAE. Dla porównania w Tabeli 2 zaprezentowano wyniki pomiarów eksperymentalnych zmierzonych przy pomocy wibrometru laserowego. Uzyskano bardzo dobrą zgodność pomiędzy obydwoma metodami badawczymi, przez co potwierdzono słuszność przyjętych warunków przeprowadzenia eksperymentu naukowego.

a)



b)



Rysunek 4. Wykres kolejnych częstości belki zdrowej i uszkodzonej uzyskany w programie ABAQUS (a) oraz mierzonej wibrometrem laserowym (b) [opracowanie własne]

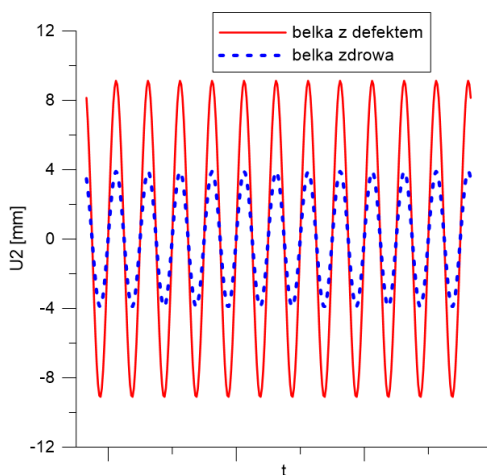
Tabela 1. Częstości własne belki zdrowej i z defektem otrzymane z symulacji w ABAQUS [opracowanie własne]

Numer kolejny częstości	Uzyskane częstości dla belki [Hz]:		Różnica względna [%]
	zdrowej	Z defektem	
$f_1$	6,40	4,43	30,78
$f_2$	40,11	36,43	9,17
$f_3$	112,29	108,26	3,59
$f_4$	219,94	213,44	2,96
$f_5$	363,36	349,42	3,84

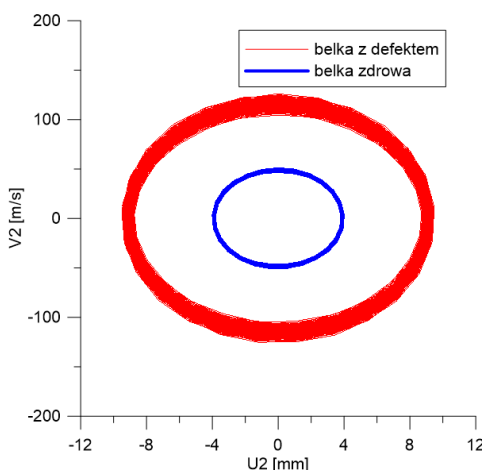
Tabela 2. Częstości własne belki zdrowej i z defektem otrzymane z eksperymentu [opracowanie własne]

Numer Kolejny częstości	Uzyskane częstości dla belki [Hz]:		Różnica względna [%]
	zdrowej	Z defektem	
$f_1$	5,75	3,25	43,48
$f_2$	35,25	33,25	5,67
$f_3$	105,25	101,00	4,04
$f_4$	208,25	196,75	5,52
$f_5$	341,25	321,00	5,93

Wykresy na Rysunku 4 przedstawiają bezpośrednie porównanie częstości własnych belki „zdrowej” i uszkodzonej otrzymanych metodą elementów skończonych w programie ABAQUS/CAE (Rysunek 4a) oraz zmierzonych przy użyciu wibrometru laserowego (Rysunek 4b). Jak widać, wpływ niewielkiego defektu ( $a/L=10\%$ ) jest wyraźnie widoczny, zwłaszcza w zakresie wyższych częstości. Warto jednak zastosować inne metody porównania odpowiedzi dynamicznej obu belek w celu uzyskania większej „czułości” metody. Próbę taką podjęto w dalszej części niniejszej pracy.



Rysunek 5. Przebieg przemieszczenia swobodnego końca belki przy wymuszeniu ciśnieniem. Rezultaty własne otrzymane w programie ABAQUS/CAE [42]



Rysunek 6. Porównanie diagramów fazowych  $V_2=f(U_2)$  dla belki „zdrowej” i uszkodzonej [opracowanie własne]

Rysunek 5 przedstawia porównanie przebiegów czasowych przemieszczenia z symulacji numerycznej, punktu końcowego belki przy wymuszeniu okresowo zmiennym ciśnieniem. Różnice amplitud drgań w okresie ustalonym są wyraźnie widoczne. Ta metoda analizy wpływu defektu na odpowiedź dynamiczną belki jest znacznie bardziej „czuła”, niż bezpośrednie porównanie częstości własnych, przedstawione na Rysunku 4.



Kolejnym sposobem analizy odpowiedzi dynamicznej belek jest zastosowanie tzw. diagramów fazowych (Rysunek 6), które uwzględniają zmiany przemieszczenia ( $U_2$ ) i prędkości ( $V_2$ ) wybranego punktu badanej struktury. Dzięki temu uzyskuje się bardzo klarowny obraz zmian dynamiki układu zawierającego defekt. Taka procedura analizy oparta na diagramach fazowych znana jest w dynamice nieliniowej. Tutaj, z sukcesem zaproponowano jej wykorzystanie do obrazowego przedstawienia różnic pomiędzy strukturą uszkodzoną i zdrową.

#### **4. Wnioski**

W niniejszej pracy zaprezentowano możliwości zastosowania wibrometru laserowego do pomiaru drgań mechanicznych belki wspornikowej. Wyniki pomiarów doświadczalnych wibrometrem laserowym porównano z rezultatami otrzymanymi przy zastosowaniu MES w programie ABAQUS. Wyniki uzyskane doświadczalnie za pomocą pomiarów wibrometrem są zbliżone z analizą MES co dowodzi słuszności przyjętego modelu numerycznego i założeń w pomiarach doświadczalnych. Występujące różnice pomiędzy metodami w większości przypadków nie przekraczają kilku procent.

Analiza wyników badań pozwala wnioskować że przedstawiona metoda oceny uszkodzeń w której wykorzystuje się topologię płaszczyzny fazowej oraz porównanie częstości drgań własnych struktury z uszkodzeniem i bez uszkodzenia jest skuteczna. Częstości drgań własnych zdrowej i uszkodzonej belki różnią się między sobą w zależności od postaci drgań, która jest analizowana. Różnica względna pomiędzy częstościami jest największa dla pierwszej częstości własnej, natomiast różnica bezwzględna jest największa dla wyższych częstości. Uzupełnieniem tej metody jest analiza płaszczyzny fazowej, na której obserwować można zmianę amplitudy i prędkości drgań jednocześnie. Prace nad metodą identyfikacji uszkodzeń będą kontynuowane dla nowoczesnych materiałów konstrukcyjnych takich jak kompozyty polimerowe wzmacniane włóknem. Ryzyko wystąpienia różnego rodzaju defektów w takich materiałach jest dość duże i dlatego będą one przedmiotem analizy w przyszłych pracach. Autorzy zamierzają również poszerzyć metodykę badawczą o analizę diagramów rekurencyjnych.

#### **Podziękowania**

Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

## Literatura

1. Cichon P., Stosiak M. *Zastosowanie wibrometru laserowego do pomiaru drgań stołu symulatora liniowego napędu hydrostatycznego*, Napedy i Sterowanie, 5 (2012), s. 66-72
2. Bathe K. J. *Computational fluid and solid mechanics 2003: Proceedings*, Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 17-20, 2003. On the different behaviour of porous ceramic polycrystalline materials under tension and compression stress state, 1st ed., Elsevier, Amsterdam, Boston, 2003
3. Sirivedin S., Fenner D. N., Nath R. B., Galiotis C. *Effects of inter-fibre spacing and matrix cracks on stress amplification factors in carbon-fibre/epoxy matrix composites. Part I: planar array of fibres*, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 34 (2003), s. 1227-1234
4. Sirivedin S., Fenner D. N., Nath R. B., Galiotis C. *Effects of inter-fibre spacing and matrix cracks on stress amplification factors in carbon-fibre/epoxy matrix composites, Part II: Hexagonal array of fibres*, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 37 (2006), s. 1936-1943
5. Yu A., Gupta V. *Measurement of in situ fiber/matrix interface strength in graphite/epoxy composites*, Composites Science and Technology, 58 (1998), s. 1827-1837
6. Muc A., Stawiarski A. *Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations*, Composite Structures, 94 (2012), s. 1871-1879
7. Zahran O., Kasban H., El-Kordy M., El-Samie F. A. *Automatic weld defect identification from radiographic images*, NDT & E International, 57 (2013), s. 26-35
8. Zou Y., Du D., Chang B., Ji L., Pan J. *Automatic weld defect detection method based on Kalman filtering for real-time radiographic inspection of spiral pipe*, NDT & E International, 72 (2015), s. 1-9
9. Manoach E., Samborski S., Mitura A., Warminski J. *Vibration based damage detection in composite beams under temperature variations using Poincaré maps*, International Journal of Mechanical Sciences, 62 (2012), s. 120-132
10. Manoach E., Trendafilova I. *Large amplitude vibrations and damage detection of rectangular plates*, Journal of Sound and Vibration, 315 (2008), s. 591-606
11. Manoach E., Warminski J., Mitura A., Samborski S. *Dynamics of a composite Timoshenko beam with delamination*, Mechanics Research Communications, 46 (2012), s. 47-53
12. Manoach E., Warminski J., Mitura A., Samborski S. *Dynamics of a laminated composite beam with delamination and inclusions*, European Physical Journal Special Topics, 222 (2013), s. 1649-1664
13. Trendafilova I., Manoach E. *Vibration-based damage detection in plates by using time series analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, 22 (2008), s. 1092-1106
14. Krawczuk M., Żak A., Ostachowicz W. *Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack*, Finite Elements in Analysis and Design, 34 (2000), s. 61-73
15. Abarbanel H. D. I. *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer-Verlag, New York, 1996

16. Eckmann J. P., Kamphorst S. O, Ruelle D. *Recurrence Plots of Dynamical Systems*, Europhysics Letters, 4 (1987), s. 973-977
17. Elwakil A. S., Soliman A. M. *Mathematical Models of the Twin-T, Wien-bridge and Family of Minimum Component Electronic Chaos Generators with Demonstrative Recurrence Plots*, Chaos, Solitons & Fractals, 10 (1999), s. 1399-1412
18. Giuliani A., Manetti C. *Hidden peculiarities in the potential energy time series of a tripeptide highlighted by a recurrence plot analysis: A molecular dynamics simulation*, Physical Review E, 53 (1996), s. 6336-6340.
19. Gradisek J., Grabec I., Siegert S., Friedrich R. *Stochastic Dynamics of Metal Cutting: Bifurcation Phenomena in Turning*, Mechanical Systems and Signal Processing, 16 (2002), s. 831-840
20. Johnson M. A., Moon F. C. *Nonlinear Techniques to Characterize Prechatter and Chatter Vibrations in the Machining of Metals*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2 (2001), s. 449-467
21. Kecik K., Rusinek R., Warminski J. *Stability Lobes Analysis of Nickel Super-alloys Milling*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 21 (2011), s. 1-12
22. Litak G., Kaminski T., Rusinek R., Czarnigowski J., Wendeker M. *Patterns in the combustion process in a spark ignition engine*, Chaos Solitons and Fractals, 35 (2008), s. 578-585
23. Litak G., Rusinek R. *Dynamics of a stainless steel turning process by statistical and recurrence analyses*, Meccanica 47 (2012), s. 1517-1526
24. Litak G., Syta A., Rusinek R. *Dynamical changes during composite milling: recurrence and multiscale entropy analysis*, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 56 (2011), s. 445-453
25. Manetti C., Giuliani A., Ceruso M. A., Webber C. L., Zbilut J. P. *Recurrence analysis of hydration effects on nonlinear protein dynamics: multiplicative scaling and additive processes*, Physics Letters A, 281 (2001), s. 317-323
26. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. *Recurrence plots for the analysis of complex systems*, Physics Reports, 438 (2007), s. 237-329
27. Marwan N., Thiel M., Nowaczyk N. R. *Cross recurrence plot based synchronization of time series*, Nonlinear Processes Geophysics, 9 (2002), s. 325-331
28. Marwan N., Wessel N., Meyerfeldt U., Schirdewan A., Kurths J. *Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data*, Physical Review E, 66 (2002), s. 26702
29. Nayfeh A. H., Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational and Experimental Methods*, John Wiley & Sons, Inc, 1995
30. Nichols J.M., Trickey S.T., Seaver M. *Damage detection using multivariate recurrence quantification analysis*, Mechanical Systems and Signal Processing, 20 (2006), s. 421-437
31. Nichols J.M., Trickey S.T., Seaver M., Moniz L. *Use of Fiber-optic Strain Sensors and Holder Exponents for Detecting and Localizing Damage in an Experimental Plate Structure*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 18 (2006), s. 51-67
32. Nomura Y., Morimoto D., Kusaka T., Furuta H. *Structural Damage Localization Based on Recurrence Plots of Chaotic Response Attractor*, Transactions

- of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, 79 (2013), s. 4210-4222
33. Poincaré H. *Introduction*, Acta Mathematica, 13 (1890) 5-7
  34. Rusinek R. *Cutting process of composite materials: An experimental study*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 45 (2010), s. 458-462
  35. Rusinek R. *Vibrations In Cutting Process Of Titanium Alloy*, Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability, 3 (2010), s. 48-55
  36. Rusinek R., Szymanski M., Warminski J., Zadrozniak M., Morshed K. *Vibrations in the Human Middle Ear*, Medical Science Monitor, 17 (2011), s. 372-376
  37. Rusinek R., Warminski J. *Attractor reconstruction of self-excited mechanical systems*, Chaos Solitons and Fractals, 40 (2009), s. 172-182
  38. Sato T., Tanaka Y. *Minor Damage Detection Using Chaotic Excitation and Recurrence Analysis*, Journal of Earthquake and Tsunami, 05 (2011), s. 259-270
  39. Thomasson N., Hoepfner T.J., Webber C.L., Zbilut J.P. *Recurrence quantification in epileptic EEGs*, Physics Letters A, 279 (2001), s. 94-101
  40. Zbilut J. P., Koebbe M., Loeb H., Mayer-Kress G. *Use of recurrence plots in the analysis of heart beat intervals*, in: [1990] *Computers in Cardiology*, Chicago, IL, USA, 23-26 Sept. 1990, s. 263-266
  41. Zolotova N. V., Ponyavin D. I. *Phase asynchrony of the north-south sunspot activity*, Astronomy & Astrophysics, 449 (2006), s. L1-L4
- Abaqus 6.13: analysis user's manual, DassaultSystemes, 2013