

# Analiza modalna w badaniu budowlanych elementów konstrukcyjnych

Dr inż. Mariusz Żółtowski, lic. Marcin Jędrzejak, Katedra Inżynierii Zarządzania, Wydział Zarządzania, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

## 1. Wprowadzenie

Analiza modalna jest szeroko stosowana w usuwaniu usterek spowodowanych drganiami infrastruktury, modyfikacją struktury, aktualizacją modelu analitycznego, czy kontrolą stanu, a także wykorzystywana jest do monitorowania wibracji struktur w przemyśle lotniczym i mechanice inżynierii lądowej [5, 22, 24].

Tradycyjna eksperymentalna analiza modalna (EAM) korzysta z wejścia (wzbudzenie) i wyjścia (odpowiedź) i mierzy się ją w celu oszacowania parametrów modalnych, składających się z częstości modalnych, tłumienia i postaci drgań. Jednak tradycyjne EAM ma pewne ograniczenia, takie jak:

- w tradycyjnej EAM, sztuczne wzbudzenie jest normalnie przeprowadzone w celu pomiaru częstotliwości drgań;
- tradycyjna EAM jest zwykle prowadzona w środowisku laboratoryjnym, ale w wielu przypadkach prawdziwy stan degradacji może się znacznie różnić od tych badanych w środowisku laboratoryjnym.

W tym artykule przedstawiono metodę analizy modalnej, która to może być stosowana do bezinwazyjnego badania stanu destrukcji konstrukcji budowlanych.

## 2. Elementy dynamiki konstrukcji budowlanych

Jednym z podstawowych kryteriów stosowanych w projektowaniu współczesnych konstrukcji budowlanych są własności dynamiczne konstrukcji. Mają one bezpośredni wpływ na drgania układu, emitowany hałas, wytrzymałość zmęczeniową i stabilność konstrukcji. Analizy własności dynamicznych w większości przypadków spotykanych w praktyce dokonuje się na podstawie analizy zachowania się modelu konstrukcji.

Najczęściej do opisu dynamiki konstrukcji stosuje się modele strukturalne (MES), które buduje się zgodnie z zasadami metody elementów skończonych. Metoda ta polega na dyskretyzacji układu o ciągłym rozkładzie parametrów, przy przyjęciu pewnych założeń upraszczających, np. związanych z linią ugięcia modelowanego elementu (metoda przemieszczeń). Jednak zbudowane w ten sposób modele, w szczególności do celów analizy dynamiki, dają wyniki przybliżone,

których zastosowanie jest bardzo ograniczone. Wymagają one dostrajania na podstawie znajomości własności zmierzonych na rzeczywistym obiekcie.

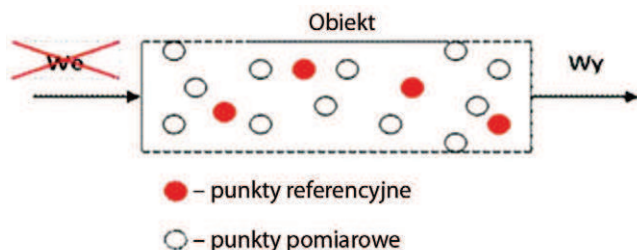
Wykorzystanie drgań w badaniu degradacji (jakości) konstrukcji budowlanych wynika z następujących powodów:

- procesy drganiowe są odzwierciedleniem zjawisk fizycznych zachodzących w konstrukcjach (odkształcenia, naprężenia, pęknięcia), od których zależy stopień destrukcji (zdatność) i poprawne funkcjonowanie, co wynika z charakteru rozprzestrzeniania się procesu drganiowego;
- łatwość pomiaru procesów drganiowych w warunkach normalnej eksploatacji obiektu, bez konieczności wyłączenia go z ruchu oraz specjalnego przygotowania, umożliwia bezdemontażową ocenę stanu destrukcji;
- procesy drganiowe cechują się dużą prędkością przekazywania informacji w jednostce czasu, określoną wzorem Shannona:

$$C = F \lg_2 \left( 1 + \frac{N_S}{N_Z} \right) \quad (1)$$

zależną od szerokości widmowej procesu  $F$  oraz stosunku mocy sygnału użytecznego  $N_S$  do mocy szumów zakłócających  $N_Z$ ;

- procesy drganiowe cechują się złożoną strukturą czasową, amplitudową i częstotliwościową, co zapewnia przy właściwym ich przetwarzaniu ocenę stanu całej konstrukcji, jak również pojedynczych jej elementów. Podczas eksploatacji konstrukcji na skutek istnienia szeregu **czynników zewnętrznych** (wymuszenia środowiska, wymuszeń od innych konstrukcji) oraz **wewnętrznych** (starzenie, zużycia, współpraca elementów) w konstrukcji następują zaburzenia stanów równowagi, które rozchodzą się w ośrodku sprężystym – materiale, z którego zbudowana jest konstrukcja (rys. 1). Zaburzenia mają charakter dynamiczny i zachowują warunki równowagi pomiędzy stanem bezwładności, sprężystości, tłumienia i wymuszenia. Powoduje to w konsekwencji rozpraszanie energii fal, ich ugięcia, odbicia i wzajemne nakładanie się. Istnienie źródła i rozprzestrzenianie się zaburzeń powoduje występowanie drgań elementów konstrukcji i otaczającego je środowiska.



**Rys. 1.** Istota pomiarowa w eksploatacyjnej analizie modalnej

Wyodrębniając w analizie stanu dynamicznego konstrukcji **procesy wejściowe, strukturę i procesy wyjściowe**, należy pamiętać o ich losowym charakterze.

**Wejście wewnętrzne** traktowane jako zbiór wielkości wymuszających – określających strukturę konstrukcji (kształt, jakość wykonania, luzy itd.) i sposób współpracy elementów jest kształtowane w warunkach losowych podczas wytwarzania, co ujawnia się własnościami losowymi podczas funkcjonowania.

**Wejście zewnętrzne** określające warunki współpracy elementów konstrukcji z innymi elementami systemu (zmiany obciążeń, prędkości, wpływ środowiska) ma w praktyce również charakter losowy.

Bogactwo możliwości zaistnienia losowości i istnienia zakłóceń jest przyczyną dodatkowych założeń dotyczących wejść oraz zachodzących transformacji stanów destrukcji konstrukcji. Dotyczą one założeń o liniowości, stacjonarności i ergodyczności modeli obiektów i procesów [1, 7, 11, 22].

### 3. Środowisko eksperymentalnej analizy modalnej

Analiza modalna jest powszechnie stosowana do badania własności dynamicznych różnorodnych konstrukcji. Badania modalne przeprowadza się dla miniaturowych i precyzyjnych konstrukcji, jak np. dyski optyczne [8], a także dla dużych konstrukcji budowlanych, jak zapory wodne czy mosty [22]. W wyniku analizy modalnej otrzymuje się model modalny konstrukcji, który może być zastosowany do rozwiązywania wielu inżynierskich problemów związanych z syntezą układów, analizą zachowania się konstrukcji pod wpływem różnych wymuszeń, modyfikacją własności dynamicznych, syntezą układów sterowania itp. [15, 18, 19].

Jednym z podstawowych problemów, które mogą być efektywnie rozwiązane za pomocą analizy modalnej, jest optymalizacja własności dynamicznych konstrukcji budowlanych, rozumiana jako modyfikacja konstrukcji w celu minimalizacji rozprzestrzeniania się w niej drgań. Techniki tutaj stosowane są nazywane metodami modyfikacji strukturalnej konstrukcji. Metody te wywodzą się wprost z metody elementów skończonych i są oparte na aparacie matematycznym umożliwiającym badanie wrażliwości zachowania się modeli na zmiany ich parametrów modalnych.

Przedstawione poniżej informacje stanowią podstawy analizy modalnej, która w krajach o wysoko rozwiniętej

technologii jest powszechnie stosowana w praktyce jako narzędzie wspomagania procesu projektowania obiektów (zamienienie do MES), w których istotnym wskaźnikiem jakości konstrukcji jest jej zachowanie w warunkach dynamicznych.

Jak już wspomniano, układ o jednym stopniu swobody jest najprostszym modelem fizycznym reprezentującym całą klasę obiektów rzeczywistych określonych następującymi parametrami: masą –  $m$ , stałą sprężystości –  $k$ , współczynnikiem tłumienia –  $c$ , i siłą wymuszającą –  $F$ . Po wykorzystaniu wprowadzonych parametrów i zasad opisu modelu (rys. 2) otrzymano równanie różniczkowe ruchu drgającego układu o jednym stopniu swobody, wyrażone zależnością:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2)$$

gdzie:  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$  – wektory przyśpieszeń, prędkości i przemieszczeń.

W praktyce większość rodzajów tłumienia występującego w układach można zastąpić równoważnym tłumieniem wiskotycznym. Zakładając zerowe warunki początkowe:  $[x(0)=0, \dot{x}(0)=0]$  oraz wykorzystując twierdzenie Laplace'a, równanie (2) można przekształcić do postaci [2,3,22]:

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \quad (3)$$

gdzie:  $s$  – zmienna zespolona,  $s = j\omega$ .

Równanie można zapisać w formie uproszczonej:

$$Z(s) X(s) = F(s) \quad (4)$$

Wielkość  $Z(s)$  jest nazywana **sztywnością dynamiczną**:

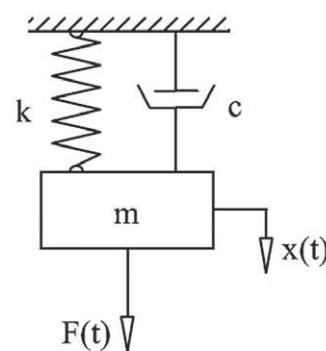
$$Z(s) = \frac{F(s)}{X(s)} \quad (5)$$

W praktycznych zastosowaniach analizy układów stosuje się odwrotność sztywności dynamicznej  $H(s)$  zwaną **podatnością dynamiczną**:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} \quad (6)$$

Podatność dynamiczną układu o jednym stopniu swobody w oparciu o równanie można zapisać jako funkcję poszczególnych parametrów układu:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (7)$$



**Rys. 2.** Układ o jednym stopniu swobody dla ruchu translacyjnego

Pojęciami ściśle związanymi z analizą modalną są *bieguny układu*; zawierają one w sobie dwa składniki: częstości własne i współczynniki tłumienia. Mianownik z zależności nazywany jest *równaniem charakterystycznym*. Bieguny układu są definiowane jako pierwiastki równania charakterystycznego i dla równania mają one postać:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (8)$$

Na podstawie równania można zdefiniować szereg często stosowanych w analizie modalnej pojęć. Wśród nich wyróżnia się pojęcie *częstości własnej nietłumionej* (dla  $c = 0$ ) opisane zależnością:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

W teorii drgań układów mechanicznych rozróżnia się trzy przypadki ruchu układów o jednym stopniu swobody: tłumienie krytyczne, nadkrytyczne i podkrytyczne. Występowanie jednego z tych przypadków zależy od wartości wyróżnika  $\Delta$  dla równania charakterystycznego. Jeśli  $\Delta = 0$ , to rozpatrujemy układ z tłumieniem krytycznym, które objawia się jedną oscylacją w ruchu swobodnym. Z warunku  $\Delta = 0$  wyznacza się *współczynnik tłumienia krytycznego*  $c_k$ :

$$c_k = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10)$$

W analizie modalnej do oceny wielkości tłumienia w układzie stosuje się bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\xi$  wyrażony zależnością (11). Bardzo często wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia podaje się w procentach.

$$\xi = \frac{c}{c_k} \quad (11)$$

Jeżeli  $\Delta > 0$ , tłumienie w układzie jest *nadkrytyczne* i ruch swobodny odbywa się bez oscylacji. Współczynnik  $\xi$  w tym przypadku posiada wartość większą od 1. Jeżeli  $\Delta < 0$ , tłumienie w układzie jest *podkrytyczne* i ruch swobodny ma charakter oscylacyjny. Współczynnik  $\xi$  w tym przypadku nie przekracza wartości 0,1. Rozwiązanie równania ruchu dla przypadku ruchu swobodnego przyjmuje postać:

$$x(t) = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t} \quad (12)$$

gdzie:  $\lambda_1, \lambda_2$  – pierwiastki równania charakterystycznego.

W przypadku tłumienia podkrytycznego pierwiastki te są zespolone i mają następujące postacie:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \delta_1 + j\omega_1 \\ \lambda_2 &= \delta_2 + j\omega_2 \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:  $\delta_1$  – współczynnik tłumienia odniesiony do częstości drgań własnych nietłumionych,  $\omega_1$  – częstość drgań własnych nietłumionych.

Wprowadzając do zależności uprzednio zdefiniowane wielkości otrzymuje się:

$$\lambda_1 = \left(-\xi_1 + j\sqrt{1-\xi_1^2}\right)\Omega_1 \quad (14)$$

Bezwymiarowy współczynnik tłumienia wyraża zależność:

$$\xi_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \delta_1^2}} \quad (15)$$

Związek pomiędzy współczynnikiem tłumienia  $\delta_1$  a bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia  $\xi_1$  wyrażony został w poniższej postaci:

$$\delta_1 = -\xi_1 \Omega_1 \quad (16)$$

Częstość drgań własnych nietłumionych wyraża się zależnością [22]:

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \delta_1^2} \quad (17)$$

Bardzo często w analizie modalnej stosuje się pojęcie reszty modalnej. W celu jej zdefiniowania należy przekształcić równanie i zapisać w postaci iloczynowej:

$$H(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)} \quad (18)$$

Po dokonaniu rozkładu na ułamki proste zależności otrzymuje się równanie:

$$H(s) = \frac{A_1}{(s-\lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(s-\lambda_1^*)} \quad (19)$$

gdzie:  $A_1$  – reszta modalna określona wzorem:

$$A_1 = \frac{1}{2j\omega_1} \quad (20)$$

Analogicznie wyznacza się te wielkości dla układów o wielu stopniach swobody.

W zastosowaniu klasycznej analizy modalnej do identyfikacji parametrów modalnych badanego obiektu w trakcie badań wyznacza się parametry modalne na podstawie pomiaru charakterystyk częstościowych zmierzonych na obiekcie w trakcie eksperymentu, polegającego na sterowanym wymuszeniu drgań układu i pomiarze odpowiedzi w postaci widma przyśpieszenia drgań. Na podstawie znajomości wymuszenia i widma odpowiedzi dokonuje się identyfikacji przebiegu charakterystyk częstościowych badanego układu. Za pomocą takich metod realizowanych w dziedzinie częstości, jesteśmy w stanie wyznaczyć parametry modalne układu w otoczeniu pojedynczej częstości własnej lub w wybranym paśmie częstości zawierającym więcej niż

jedną częstość własną. Dla wielu konstrukcji w warunkach eksploatacji działają na układ zupełnie inne siły wymuszające, które co do charakteru przebiegu czasowego, rozkładu przestrzennego i amplitudy nie mogą być realizowane w warunkach laboratoryjnych. Podobnie dla warunków brzegowych, które w trakcie eksperymentu zależą od możliwości zamocowania obiektu na stanowisku badawczym, różnią się one od warunków występujących w czasie eksploatacji.

W praktycznych zastosowaniach realizacji badań modalnych obiektów, badany układ jest zbyt duży i ma zbyt dużą masę, aby można było wymusić odpowiednią amplitudę ruchu w warunkach eksperymentu czynnego. Wymienione ograniczenia są minimalizowane poprzez zastosowanie metod analizy modalnej realizowanej na podstawie pomiarów przeprowadzonych w trakcie normalnej pracy obiektu.

Parametry modelu modalnego umożliwiają rozprężenie równań opisujących drgania układu, a ich wartości wyznacza się z zależności [20, 21, 22]:

$$m_r = \frac{1}{2j\varpi_r R_{ir}}; k_r = \varpi_{nr}^2 m_r; c_r = 2m_r \varpi_{rn} \delta_m \quad (21)$$

Wielkości te opisują własności układu związane z  $r$ -tą częstością własną i zmiany częstości własnej zależą wprost proporcjonalnie od wielkości zmian sztywności lub masy, jak też zależą od miejsca rozwoju uszkodzenia w konstrukcji. Przedstawione uzasadnienie wystarcza dla opisu zmian destrukcji elementów murowych, natomiast cała teoria z obszaru analizy modalnej opisana została w dostępnej literaturze [6, 9, 14].

Zastosowanie najnowocześniejszych technologii informatycznych w analizie modalnej powoduje, że otrzymane modele modalne stają się bardziej wiarygodne i mogą być wykorzystywane do rozwiązywania wielu problemów związanych z konstruowaniem złożonych obiektów budowlanych o zadanych własnościach dynamicznych.

Analiza modalna jest stosowana dla celów modyfikacji konstrukcji, diagnostyki stanu konstrukcji, dla celów syntezy sterowania w układach aktywnej redukcji drgań oraz dla celów weryfikacji i walidacji modeli numerycznych, takich jak modele elementów skończonych czy elementów brzegowych.

Analiza modalna może być stosowana, jeżeli spełnione są następujące założenia:

- układ jest liniowy i jego dynamika może być opisana za pomocą liniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych;
- współczynniki równań opisujących dynamikę obiektu są stałe w czasie pomiarów;
- układ jest obserwowalny i istnieje możliwość pomiaru wszystkich charakterystyk, których znajomość jest niezbędna do identyfikacji modelu;
- badany układ spełnia zasadę wzajemności Maxwella;
- tłumienie w układzie jest małe lub proporcjonalne.

Ważnym ograniczeniem stosowania analizy modalnej jest też założenie o ograniczonej liczbie stopni swobody badanego układu, z czym wiąże się wymiar macierzy mas, sztywności i tłumienia oraz liczba teoretycznych częstości własnych i postaci drgań.

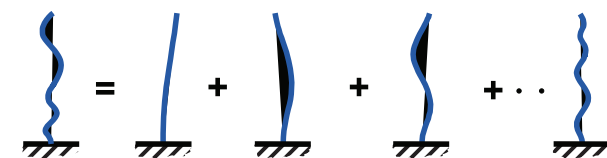
Przy spełnieniu powyższych założeń analizę modalną można określić jako transformację (przekształcenie) złożonego układu, którego dynamika jest opisana za pomocą układu równań różniczkowych, na zbiór układów o jednym stopniu swobody opisanych za pomocą niezależnych równań różniczkowych drugiego rzędu – rysunek 3.

Matematycznie zadanie to można zdefiniować jako rozprężanie równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących dynamikę badanej konstrukcji.

Eksploatacyjna analiza modalna wykorzystywana jest do identyfikacji obiektów o dużych rozmiarach przestrzennych i dużych masach, oparta jest o pomiar odpowiedzi na wymuszenia eksploatacyjne, będące wynikiem działania sił zewnętrznych bądź wymuszeń kinematycznych oraz procesu destrukcji elementów budowli [5, 7, 9, 16].

Eksploatacyjna analiza modalna:

- umożliwia analizę modalną obiektów o dużych rozmiarach, dla których testy laboratoryjne byłyby utrudnione,
- modeluje poprawnie obiekty, gdyż wymuszenia odpowiadają obciążeniom rzeczywistym,
- umożliwia identyfikację modeli nieliniowych.



$$\{X(t)\} = q_1(t)\{\phi\}_1 + q_2(t)\{\phi\}_2 + q_3(t)\{\phi\}_3 + \dots + q_n(t)\{\phi\}_n$$

**Rys. 3.** Rozkład drgań złożonych na drgania proste

Metoda eksploatacyjnej analizy wyznaczania postaci drgań oparta jest o wielokanałowy pomiar odpowiedzi w węzłowych punktach obiektu rzeczywistego. System umożliwia graficzne przedstawienie zachowań dynamicznych obiektu w warunkach eksploatacyjnych. Danymi wejściowymi do systemu są przebiegi czasowe drgań mechanicznych, występujących w węzłowych punktach obiektu, odniesione do jednego z nich (o najwyższej amplitudzie). Wyznaczane są widma mocy własne  $G_{xx}(j, \varpi)$  i widma mocy wzajemnej odpowiedzi  $G_{yy}(j, \varpi)$ , przy czym punkt „x” obiektu jest punktem odniesienia, a punkty „y” są węzłowymi punktami obiektu.

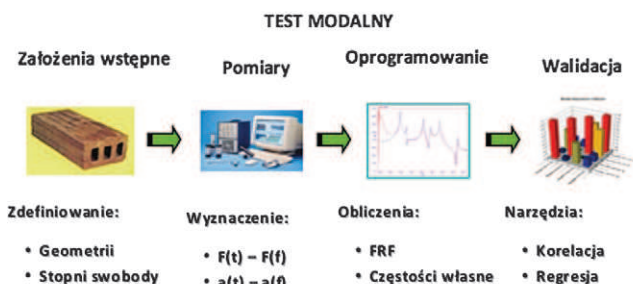
Obecnie coraz częściej stosuje się modele modalne do oceny stanu destrukcji materiałów budowlanych konstrukcji. Ideą tej metody jest śledzenie zmian parametrów modelu (w tym przypadku modelu modalnego), powstających na skutek zużycia lub awarii, na podstawie bieżących obserwacji obiektu. W metodzie tej tworzy

się model modalny dla obiektu bez uszkodzenia, jako wzorzec, a następnie w czasie eksploatacji identyfikuje się model modalny i bada jego korelację z modelem dla obiektu nieuszkodzonego. W przypadku gdy korelacja taka występuje, można twierdzić, że obiekt jest w stanie bez uszkodzenia. W przypadku braku korelacji można spodziewać się uszkodzenia obiektu. Dysponując informacjami o wpływie danego uszkodzenia na parametry modelu modalnego, można określić jego rodzaj oraz ocenić ilościowo stopień uszkodzenia. Przedstawione zastosowania analizy modalnej do rozwiązywania zagadnień badawczych i inżynierskich wskazują na uniwersalność i efektywność tej metody, która jak do tej pory nie знаła szerszego zastosowania w praktyce polskich biur projektowych, czy jednostek badawczych. Na świecie w większości krajów o rozwiniętej technologii stanowi ona podstawowe narzędzie syntezy i analizy dynamicznej konstrukcji.

#### 4. Eksperyment w analizie modalnej

Eksperyment w identyfikacji stanu destrukcji badanych elementów murowych jest podstawowym źródłem informacji i na jego podstawie ustala się wartości miar i strukturę modelu. Z jednej strony od jakości wyników badań eksperymentalnych zależy jakość otrzymanego modelu, z drugiej zaś sposób przeprowadzenia eksperymentu determinuje strukturę identyfikowanego modelu. Eksperyment w analizie modalnej można podzielić na następujące etapy:

1. Planowanie eksperymentu:
  - wybór sposobu wymuszania drgań badanych elementów i punktów przyłożenia,
  - wybór punktów pomiaru drgań i aparatury pomiarowej,
  - wybór odpowiedniego sprzętu pomiarowego,
  - wybór sposobu zawieszenia układu.
2. Kalibracja toru pomiarowego.
3. Akwizycja i przetwarzanie wyników eksperymentu. Celem eksperymentu w analizie modalnej jest wymuszenie ruchu badanego elementu murowego oraz pomiar odpowiedzi na zadane wymuszenie. Na podstawie zmierzonych wielkości procesu drganiowego dokonywana jest estymacja jego charakterystyk dynamicznych. Ogólną procedurę realizacji badań tej pracy pokazano na rysunku 4.



**Rys. 4.** Przebieg procedury realizacji badań w analizie modalnej

#### 6. Podsumowanie

Przedstawiony opis najważniejszych właściwości analizy modalnej wskazuje na fakt, iż istnieje możliwość wykorzystania jej do badań nieniszczących konstrukcji budowlanych narażonych na niekorzystne oddziaływanie drgań.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Batel M., Operational modal analysis – another way of doing modal testing. Sound and Vibration, August 2002
- [2] Bishop R., Johnson D., The mechanics of vibration. Cambridge University, Press, 1980.
- [3] Brandt S., Data analysis (in Polish). Wydawnictwo Naukowe PWN (Scientific Publishing House), Warszawa 1999
- [4] Brown D., Allemang R., Multiple Input Experimental Modal Analysis. Fall Technical Meeting, Society of Experimental Stress Analysis, Salt Lake City, UT, November 1983
- [5] Brunarski L., Non-destructive methods for concrete testing (in Polish). Arkady, Warszawa 1996
- [6] Formenti D., Richardson M., Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials (twenty years of progress). Proceedings of International Modal Analysis Conference XX, February 4-7, 2002, Los Angeles, CA
- [7] Ibrahim S., Mikulcik E.A., Method for the direct identification of vibration parameters from the free response. Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, Part 4, 1977
- [8] Peeters B., Ventura C., Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. Submitted to Mechanical Systems and Signal Processing, 2001
- [9] Pickrel C.R., Airplane ground vibration testing – nominal modal model correlation. Sound and Vibration, November 2002
- [10] Richardson M., Is it a mode shape or an operating deflection shape?. Sound and Vibration, February 1997
- [11] Richardson M., Structural dynamics measurements. Structural Dynamics@2000: Current status and future directions, Research Studies Press, Ltd. Baldock, Hertfordshire, England, December 2000
- [12] Shih C., Tsuei Y., Allemang R., Brown D., Complex mode indication function and its applications to spatial domain parameter estimation. Proceedings of International Modal Analysis Conference VII, January 1989
- [13] Uhl T., Computer-aided identification of mechanical structure models (in Polish). WNT (Scientific Technical Publishers), Warszawa 1997
- [14] Vold H., Schwarz B., Richardson M., Display operating deflection shapes from non-stationary data. Sound and Vibration, June 2000
- [15] Vold H., Kundrat J., Rocklin G.A., Multi-input modal estimation algorithm for mini-computers. S.A.E. paper No. 820194, 1982
- [16] Williams R., Crowley J., Vold H., The multivariate mode indicator function in modal analysis. Proceedings of International Modal Analysis Conference III, January 1985
- [17] Żółtowski M., Computer-aided management of system's operation in production enterprise. Integrated management (in Polish). Oficyna Wydawnicza Polskiego Towarzystwa Zarządzania Produkcją (Publishing House of Polish Society on Production Management), vol. 2, Opole 2011
- [18] Żółtowski M., Identification of vibration hazards to building objects (in Polish). Budownictwo Ogólne (General Building), ZN ATR, Bydgoszcz 2005
- [19] Żółtowski M., Investigations of harbour brick structures by using operational modal analysis. Polish Maritime Research No 1/2014, pp 32-38
- [20] Żółtowski M., Measurements of acoustic properties of materials (in Polish). Diagnostyka, PTDT, Polska Akademia Nauk (Polish Academy of Sciences), vol.33, 2005
- [21] Żółtowski M., Modal analysis in the testing of building materials ITE-PIB, Radom 2011
- [22] Żółtowski M., Selection of information on identification of the state of machine. UWM, Acta Academia 310, Olsztyn 2007
- [23] Żółtowski M., Żółtowski B., Castaneda L., Study of the state Francis Turbine. Polish Maritime Research No 2/2013, pp 32-38
- [24] Żółtowski M., Technical state identification of wall-elements based on frequency response function. REM-Revista Escola de Minas Applied Mechanics and Materials, Kolumbia 2014